Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Калининградский государственный технический университет"
Институт финансов, экономики и менеджмента

А. М. Карлов

ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие для обучающихся в магистратуре
по направлениям подготовки
"Экономика", "Менеджмент", "Финансы и кредит"

Калининград
Издательство ФГБОУ ВО "КГТУ"
2016

УДК 336.11:519.876.2
ББК 65.261

Карлов. А. М. Финансовые вычисления: учеб. пособие. – Калининград: Изд-во ФГБОУ ВО "КГТУ", 2016. – 142 с.

Учебное пособие написано в соответствии с программой дисциплины "Актуарные расчеты", включенной в учебный план подготовки магистров по направлениям "Экономика", "Менеджмент", "Финансы и кредит". Материал учебного пособия скомпонован по пяти разделам: "Теория процентов", "Финансовые потоки, ренты", "Финансовые операции в условиях неопределенности", "Портфельный анализ", "Облигации". В пособии приведены теоретические сведения, необходимые менеджерам, финансистам и экономистам широкого профиля для принятия обоснованных финансовых решений. На конкретных практических примерах показано применение рассматриваемого теоретического материала. В конце каждого раздела приведены вопросы и задания для самоконтроля.

Учебное пособие может быть использовано при изучении дисциплины "Основы финансовых вычислений" бакалаврами, обучающимися по направлению "Экономика", а также полезно специалистам в области экономики и финансов.

УДК 334. 72 (470.26)

ISBN 978-5-94826-462-2

Содержание

Введение

С переходом к рыночной экономике субъекты хозяйственной деятельности должны самостоятельно принимать те или иные управленческие решения в постоянно меняющейся финансово-экономической ситуации. Выбор принимаемых управленческих решений должен осуществляться на основе количественной оценки финансовых результатов деятельности субъекта хозяйствования, соответствующих принятому решению. Возможные количественные оценки этих результатов могут быть получены только на основе финансовых расчетов.

В учебном пособии последовательно изложены современные методы финансовых вычислений. Оно состоит из пяти тематических разделов: "Теория процентов", "Финансовые потоки, ренты", "Финансовые операции в условиях неопределенности", "Портфельный анализ", "Облигации". Содержание учебного пособия соответствует учебной рабочей программе дисциплины "Финансовые вычисления" входящей в учебный план подготовки магистрантов по направлениям ""Финансы и кредит", "Экономика", "Менеджмент". При изучении данной дисциплины магистранты приобретают профессиональную компетенцию, которая определяет способность использовать точные математические и вероятностные методы для оценки доходности и рисков финансовых операций применительно к денежным потокам при депозитной, кредитной, инвестиционной деятельности и при операциях с ценными бумагами.

В каждом разделе применение излагаемого теоретического материала демонстрируется на примерах решения конкретных задач. В конце каждого раздела приводится перечень контрольных вопросов и заданий для самостоятельного контроля уровня освоения изучаемого материала.

Учебное пособие может использоваться бакалаврами при изучении дисциплины "Основы финансовых вычислений".

1. Теория процентов

1.1. Доходность финансовой операции

Под финансовой операцией понимают любые операции по вложению, размещению, инвестированию временно свободных денежных средств или их эквивалентов с целью получения дохода.

Лицо, предоставляющее временно свободные средства, является *кредитором*. Лицо, совершающее финансовые операции с этими средствами и берущее на себя обязательство вернуть через определенное время t эти средства, увеличенные на оговоренную сумму дохода, называют *заемщиком*.

Обозначим первоначальную сумму размещаемых кредитором средств через S_0, а сумму, возвращаемую заемщиком после совершения финансовой операции, через $S_t = S_0 + \Delta S_t$, где ΔS_t - величина дохода, полученного от использования первоначальной суммы в течение времени t.

Доходность финансовой операции можно определить отношением:

$$\mu_t = \frac{S_t - S_0}{S_0} = \frac{\Delta S_t}{S_0}. \tag{1.1}$$

Доходность финансовой операции оценивают в относительных величинах (1.1) или в процентах:

$$\mu_t = \frac{\Delta S_t}{S_0} \times 100\%.$$

Сумма денежных средств, получаемая кредитором в конце финансовой операции, будет равна $S_t = S_0(1 + \mu_t)$, где μ_t - доходность в относительных единицах.

При принятии решения о вложении временно свободных денежных средств кредитор учитывает время t, через которое он получит их с доходом ΔS_t; доходность μ_t финансовой операции, которую обещает заемщик; возможные риски, связанные с данной операцией.

Естественно, кредитор будет рассматривать несколько вариантов финансовых операций, среди которых будет практически безрисковое размещение денежных средств на банковский депозит с гарантированной годовой доходностью $t = 1$ год.

Обозначим годовую доходность по банковским депозитным вкладам буквой i.

$$i = \frac{\Delta S_1}{S_0}; \quad S_1 = S_0(1 + i),$$

где ΔS_1 и S_1 - величина дохода и общая сумма, получаемая кредитором после истечения одного года вклада.

Величину i называют годовой процентной ставкой – это сумма, выплачиваемая кредитору в конце периода начисления 1 год за каждую единичную сумму (например, $S_0 = 1$ тыс. руб.), занятую заемщиком в начале периода.

1.2. Простые проценты

Схема начисления простых процентов поясняется рис. 1.1.

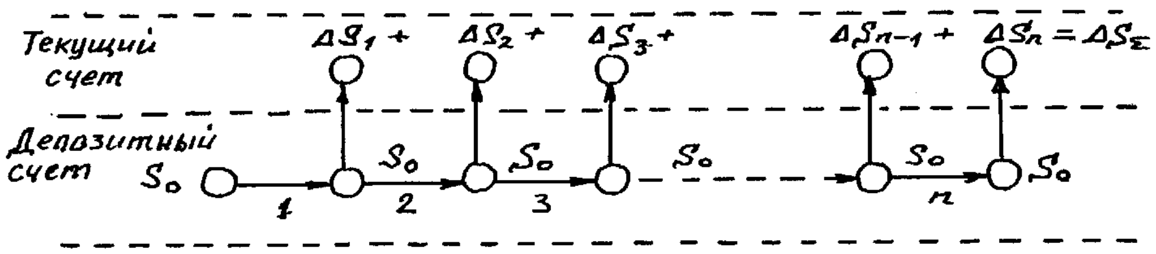

Рис. 1.1. Схема начисления простых процентов

Пусть первоначальная сумма, внесенная на депозит, равна S_0 при годовой процентной ставке i. Тогда наращенная за год сумма будет равна:

$$S_1 = S_0(1+i) = S_0 + iS_0 = S_0 + \Delta S_1.$$

Если депозитный договор заключен на n лет с фиксированной годовой процентной ставкой, при начислении дохода $\Delta S_1 = iS_0$ по схеме простых процентов, то в конце каждого года этот доход переводится на текущий счет, а сумма, размещенная на депозите, остается постоянной, равной S_0.

На текущем счете банковская процентная ставка равна нулю $i_m = 0$. Доходы, перечисляемые на текущий счет, могут по усмотрению кредитора или оставаться на текущем счете, или изыматься, для своих нужд.

Если депозитный договор заключен на n лет, то в конце срока вклада кредитор получит сумму:

$$S_n = S_0 + \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \ldots + \Delta S_n.$$

При постоянной годовой процентной ставке $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \ldots = \Delta S_n = iS_0$ конечная наращенная за n лет сумма будет равна:

$$S_n = S_0(1+ni); \quad \Delta S_\Sigma = S_0 ni. \tag{1.2}$$

Если процентная ставка изменяется год от года, то:

$$S_n = S_0(1 + i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n) = S_0\left(1 + \sum_{k=1}^{n} i_k\right)$$

$$\Delta S_\Sigma = S_0 \sum_{k=1}^{n} i_k, \tag{1.3}$$

где i_k - годовая процентная ставка в k-м году.

Если момент возврата ссуды является переменной величиной (например, депозитный вклад до востребования), то наращенная сумма в день выдачи ссуды определяется по формуле:

$$S_t = S_0\left[1 + i\,\frac{(t - t_0)}{T_г}\right], \tag{1.4}$$

где t_0 - день вложения средств на депозит;

t - день возврата средств;

$t - t_0$ - срок действия депозитного договора в днях;

$T_г = 365$ - количество дней в году.

Если денежные средства в сумме S_0 по схеме простых процентов последовательно вкладываются на промежутки времени $n_1; n_2; n_3..; n_k$ дней с разными годовыми процентными ставками $i_1; i_2; i_3..; i_k$, то наращенная сумма S_Σ за весь период времени $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$ будет равна:

$$S_\Sigma = S_0\left(1 + \frac{1}{365}\sum_{k=1}^{K} n_k i_k\right). \tag{1.5}$$

Иногда депозитные договоры заключаются с m-кратным начислением процентов в году. При $m = 4$ проценты начисляются и могут быть выплачены ежеквартально, при $m = 12$ - ежемесячно. В этом случае наращенная сумма на первом сроке выплаты процентов будет равна:

$$S_1 = S_0\left(1 + \frac{i}{m}\right), \quad \Delta S_1 = S_0\,\frac{i}{m},$$

где m - кратность начисления процентов в году; i – годовая процентная ставка.

Тогда при сроке вклада 1 год проценты в размере $S_1 = S_0\,\frac{i}{m}$ будут начислены m раз, и наращенная сумма по истечении года будет равна:

$$S_m = S_0 + mS_0\,\frac{i}{m} = S_0(1 + i).$$

Отсюда следует, что при размещении средств по схеме простых процентов увеличение кратности выплат не приводит к увеличению наращенной суммы.

В соответствии с формулой (1.4) наращенная сумма в схеме простых процентов является линейной возрастающей функцией с увеличением срока вклада.

1.3. Сложные проценты

Получение наращенной суммы S_n при начислении процентов по схеме сложных процентов поясняется рис. 1.2.

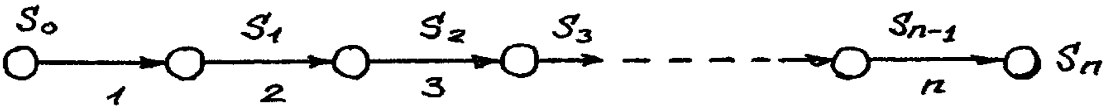

Рис. 1.2. Наращение суммы вклада по схеме сложных процентов

При наращении по схеме сложных процентов происходит реинвестирование, или капитализация полученных процентов. Предположим, денежные средства S_0 вкладываются в банк на депозитный договор с капитализацией начисляемых процентов по годовой процентной ставке *i* на *n* лет.

По истечении первого года наращенная сумма будет равна:

$$S_1 = S_0(1+i).$$

На втором году сумма депозитного вклада будет равна S_1, и наращенная сумма по истечении второго года будет равна:

$$S_2 = S_1(1+i) = S_0(1+i)^2.$$

К концу *n*-го года действия депозитного договора наращенная сумма будет определяться формулой:

$$S_n = S_0(1+i)^n. \qquad (1.6)$$

Таким образом, последовательность наращенных сумм S_0; S_1; S_2 ..; S_n является геометрической прогрессией с начальным членом S_0 и знаменателем прогрессии $q = (1+i)$. Коэффициент пропорциональности $(1+i)^n$ между наращенной S_n и первоначальной S_0 суммами называется коэффициентом наращения. При определении наращенной суммы в произвольный момент времени *t* необходимо пользоваться формулой:

$$S_t = S_0(1+i)^{\frac{t-t_0}{T_г}}, \qquad (1.7)$$

где t_0 - день вложения денежных средств на депозит;

t - день окончания депозитного договора;

$t - t_0$ - срок депозитного вклада в днях;

$T_г$ - количество дней в году.

Суммарный доход ΔS_Σ, получаемый за весь срок депозитного вклада, в соответствии с формулами (1.6) и (1.7) может быть представлен в виде:

$$\Delta S_{\Sigma n} = S_0[(1+i)^n - 1],$$
$$\Delta S_{\Sigma t} = S_0[(1+i)^{\frac{t-t_0}{T^г}} - 1]. \qquad (1.8)$$

Определим наращенную сумму при m-кратном начислении процентов в год. Если начисление сложных процентов происходит m раз в году, то наращенная сумма при первом начислении процентов будет равна:

$$S_1 = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right).$$

При втором начислении процентов:

$$S_2 = S_1\left(1+\frac{i}{m}\right) = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^2.$$

По истечении одного года при m-том начислении процентов наращенная сумма будет равна:

$$S_m = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^m. \qquad (1.9)$$

Если депозитный договор с m-кратным начислением процентов и их капитализацией заключается на n лет, наращенную сумму можно определить по формуле:

$$S_n = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}. \qquad (1.10)$$

Определим эффективную годовую процентную ставку $i_{эф}$ при m-кратном начислении процентов с их капитализацией из равенства получаемых за год наращенных сумм:

$$S_m = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^m = S_0(1+i_{эф}).$$

Отсюда для годовой эффективной процентной ставки получим:

$$i_{эф} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1. \qquad (1.11)$$

Тогда формулу (1.10) для срока депозитного договора на n лет при m-кратном начислении процентов можно записать в виде:

$$S_n = S_0(1+i_{эф})^n, \qquad (1.12)$$

где $i_{эф}$ определяется формулой (1.11).

В соответствии с формулами (1.6), (1.7) и (1.12) наращенная сумма в схеме сложных процентов является показательной функцией. Сравнение наращенных сумм вычисляемых по схеме простых и сложных процентов (рис. 1.3), позволяет сделать следующие выводы:

1) при сроке вклада один год наращение по схеме простых и сложных процентов при одинаковых процентных ставках имеет одинаковый коэффициент наращения;

2) при сроке вклада меньше одного года коэффициент наращения по схеме простых процентов больше, чем при схеме сложных процентов;

3) при сроке вклада больше одного года коэффициент наращения по схеме сложных процентов больше, чем при схеме простых процентов;

4) при наращении по схеме сложных процентов m-кратное начисление процентов приводит к увеличению коэффициента наращения;

5) при наращении по схеме простых процентов m-кратное начисление процентов не влияет на коэффициент наращения.

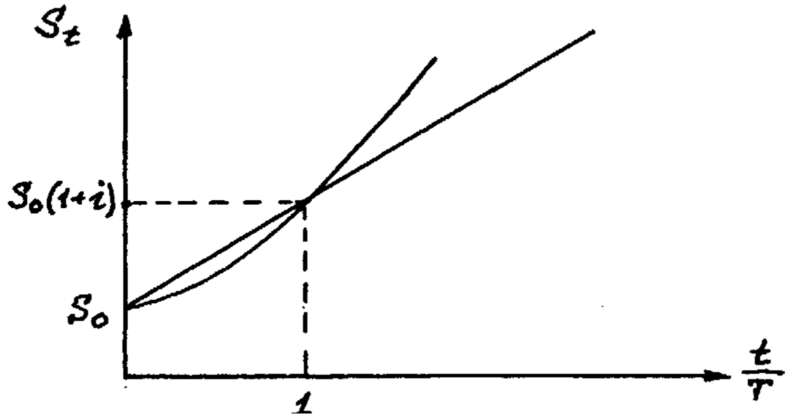

Рис. 1.3. Наращение по простой и сложной ставкам

1.4. Дисконтирование и удержание процентов

Дисконтирование и удержание процентов является, по сути, обратными операциями по отношению к начислению процентов. Различают математическое дисконтирование и банковский учет.

Математическое дисконтирование позволяет узнать, какую исходную сумму S_0 нужно вложить, чтобы получить по истечении определенного времени, например, n лет наращенную сумму S_n при наращении по годовой процентной ставке i.

1) В случае простых процентов из формулы (1.2) следует

$$S_0 = \frac{S_n}{1+ni}, \tag{1.13}$$

или из формулы (1.4) можно определить

$$S_0 = \frac{S_t}{1+i\dfrac{(t-t_0)}{T_г}}.$$

2) В случае сложных процентов из формулы (1.6) следует

$$S_0 = \frac{S_n}{(1+i)^n}, \qquad (1.14)$$

или из формулы (1.7) можно определить

$$S_0 = \frac{S_t}{(1+i)^{\frac{(t-t_0)}{T_г}}}.$$

При m-кратном начислении процентов математическое дисконтирование определяется формулой

$$S_0 = \frac{S_n}{(1+i_{эф})^n}, \qquad (1.15)$$

где $i_{эф}$ определяется формулой (1.11).

Величина S_0 называется приведенным значением величины S_n. При математическом дисконтировании годовые процентные ставки i называются ставками дисконтирования.

Банковский учет – это покупка банком денежных обязательств (денежных эквивалентов) по цене, меньшей номинальной указанной в обязательствах суммы.

Примером денежных обязательств может служить вексель - долговая расписка, содержащая обязательство выплатить определенную денежную сумму (номинал, указанный в векселе) в определенный срок.

В случае покупки банком векселя говорят, что он учитывается банком по номинальной сумме S_0, а клиенту выплачивается сумма

$$S_n = S_0 - I_n, \qquad (1.16)$$

где S_n - цена покупки банком векселя за *n* лет до срока его погашения;

S_0 - номинальная сумма векселя;

I_n - дисконт или доход банка.

Формулу (1.16) можно записать в виде:

$$S_n = S_0\left(1 - \frac{I_n}{S_0}\right).$$

При *n*, равном одному году, отношение $\frac{I_1}{S_0} = d$ называют годовой учетной ставкой денежных обязательств, или банковской ставкой дисконтирования.

Учет денежных обязательств может осуществляться банком по простой и сложной схеме дисконтирования.

В случае простой схемы дисконтирования последовательность сумм, которые могут быть выплачены клиенту, при увеличении *n* образуют убывающую арифметическую прогрессию с общим членом

$$S_n = S_0(1 - nd), \qquad (1.17)$$

равным сумме, которую получит клиент от банка за n лет до погашения денежного обязательства.

В случае сложной схемы последовательность сумм, которые могут быть выплачены при увеличении n, образуют геометрическую убывающую прогрессию со знаменателем $q=(1-d)^n<1$ и общим членом

$$S_n = S_0(1-d)^n, \tag{1.18}$$

равным сумме, которую получит клиент от банка за n лет до срока погашения денежного обязательства.

При сроке до погашения денежного обязательства, не кратном одному году, формулы дисконтирования по простой и сложной схеме можно записать в виде:

$$S_t = S_0\left(1-\frac{t}{T_г}d\right),$$
$$S_t = S_0(1-d)^{\frac{t}{T_г}}, \tag{1.19}$$

где t – количество дней до срока погашения денежного обязательства;

$T_г$ – количество дней в году.

Расчеты, проведенные по формулам (1.19), позволяют сделать следующие выводы:

1) Зависимость S_t от t при простой схеме дисконтирования является линейной спадающей функцией (рис. 1.4). При $t \geq T_г / d$ клиенту не имеет смысла закладывать денежные обязательства, так как выплачиваемая ему банком сумма будет равна нулю.

2) Зависимость S_t от t при сложной схеме банковского дисконтирования является показательной при основании показательной функции $(1-d)<1$ (рис. 1.4).

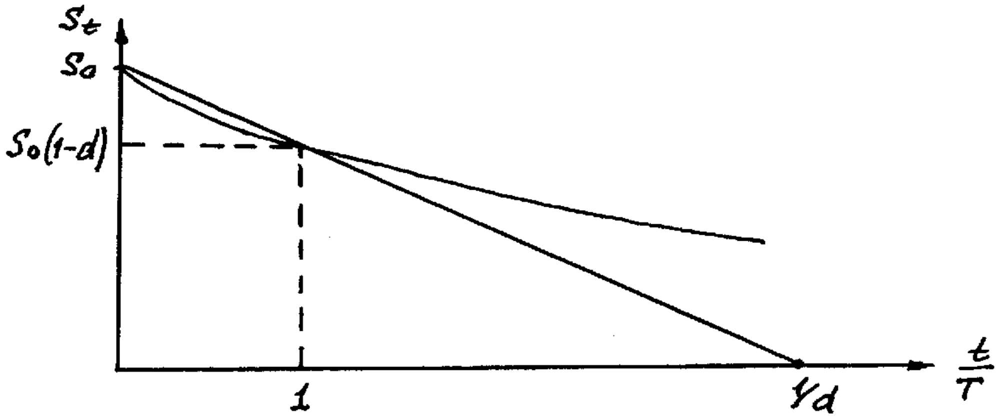

Рис. 1.4. Дисконтирование по простой и сложной ставкам

3) Сумма, выплачиваемая клиенту при сроке $n = 1$ год, до погашения денежного обязательства при его учете по простой и сложной схеме одинакова.

4) При сроке учета t меньше одного года банку выгоднее учитывать денежное обязательство по сложной ставке дисконтирования, а при сроке учета больше года – по простой учетной ставке.

1.5. Влияние инфляции на ставку процента

Сначала рассмотрим суть явления инфляции на примере стоимости потребительской корзины, которая включает в себя N видов товаров (продовольственных и непродовольственных) и услуг. Количество единиц товаров m_i каждого вида ($i = 1 \div N$) необходимых на некоторый срок t, также утверждено в составе продовольственной корзины. Предположим, что в некоторый момент времени t_0 цены за единицу каждого вида товара были равны $Ц_{i0}$. Тогда стоимость потребительской корзины можно определить по формуле:

$$S_{пк_o} = \sum_{i=1}^{N} m_i Ц_{i0}.$$

По истечении некоторого времени t - t_0 цены на некоторые товары могут измениться как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения. Предположим, что в момент времени t цены имеют значение $Ц_{it}$. Стоимость потребительской корзины в момент времени t определится аналогичной формулой:

$$S_{пк_t} = \sum_{i=1}^{N} m_i Ц_{it}.$$

Если $S_{пк_t} > S_{пк_o}$, говорят о явлении инфляции; если $S_{пк_t} < S_{пк_o}$, говорят о явлении дефляции. Как правило, по истечении некоторого интервала времени t - t_0 (месяц, квартал, год) стоимость потребительской корзины увеличивается из-за увеличения цен на товары, т. е. наблюдается явление инфляции. Увеличение стоимости потребительской корзины можно записать в виде

$$S_{пк_t} = S_{пк_o} + \Delta S_{пк_t} = S_{пк_o}(1 + \alpha_t). \qquad (1.20)$$

Величину $\alpha_t = \dfrac{\Delta S_{пк_t}}{S_{пк_o}}$ называют темпом или уровнем инфляции. Данные об уровне инфляции α_t за каждый календарный месяц прошедших лет можно найти в Интернете.

Но явление инфляции можно рассматривать с другой точки зрения. Предположим, что в момент времени t_0 имелась сумма денежных средств S_0 руб., и эта сумма равна стоимости потребительской корзины $S_{пк_o}$.

Через некоторое время t - t_0 стоимость потребительской корзины увеличилась из-за инфляции, и за ту же сумму денежных средств S_0 руб. нельзя приобрести весь перечень товаров, входящих в потребительскую корзину, т. е. явление инфляции проявляется в снижении покупательной способности денежных средств - денежные средства S_0 руб. обесцениваются. Их реальная стоимость, определяющаяся покупательной способностью, уменьшается и может быть определена по формуле:

$$S_{t\alpha} = \frac{S_0}{1+\alpha_t}. \qquad (1.21)$$

В статистических данных приводятся значения уровня инфляции α за каждый календарный месяц года. Определим уровень инфляции за несколько периодов (месяцев). Пусть темпы инфляции за последовательные периоды времени равны $\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3...;\alpha_n$ (рис. 1.5). Первоначальная сумма денежных средств S_0 по прошествии первого периода времени t_1 с уровнем инфляции α_1 будет иметь реальную стоимость:

$$S_1 = \frac{S_0}{1+\alpha_1}.$$

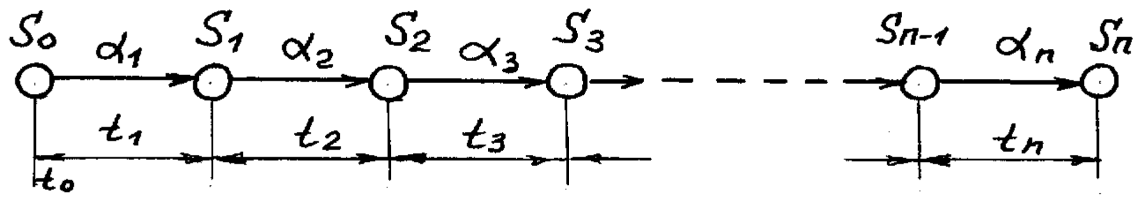

Рис. 1.5. Определение уровня инфляции за несколько периодов

После истечения двух периодов времени реальная стоимость первоначальной суммы денежных средств будет равна:

$$S_1 = \frac{S_1}{1+\alpha_2} = \frac{S_0}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}. \qquad (1.22)$$

Для реальной стоимости денежных средств после истечения n периодов времени, по аналогии с формулой (1.22), можно записать:

$$S_n = \frac{S_0}{\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)}. \qquad (1.23)$$

Суммарный уровень инфляции за все n периодов должен давать такую же реальную стоимость денежных средств, как и формула (1.23):

$$S_n = \frac{S_0}{1+\alpha_{\Sigma n}} = \frac{S_0}{\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)}.$$

Отсюда для суммарного уровня инфляции за n периодов получим:

$$\alpha_{\Sigma n} = \prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i) - 1. \qquad (1.24)$$

Введем понятие среднего за период уровня инфляции. Если интервалы t_i равны, например, одному месяцу, а n = 12, то будем говорить о среднегодовом уровне инфляции α_{cp}. При таком подходе можно считать уровень инфляции во всех месяцах года постоянным, равным среднегодовому $\alpha_i = \alpha_{cp}$. С учетом данного равенства формулу (1.23) можно записать в виде:

$$S_n = \frac{S_0}{\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)} = \frac{S_0}{(1+\alpha_{cp})^n}.$$

Из этого равенства для среднегодового уровня инфляции получим формулу:

$$\alpha_{cp} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)} - 1. \qquad (1.25)$$

Оценим вначале влияние инфляции на годовую процентную ставку. При первоначальной сумме S_0 наращенная сумма S_α через один год с учетом инфляции может быть определена по формуле:

$$S_\alpha = \frac{S_0(1+i)}{(1+\alpha_\Sigma)}, \qquad (1.26)$$

где α_Σ - суммарный годовой уровень инфляции, определяемый по формуле (1.24) по данным о ежемесячном уровне инфляции α_i.

Формула (1.26) может быть преобразована к виду:

$$S_\alpha = S_0\frac{1+\alpha_\Sigma + i - \alpha_\Sigma}{(1+\alpha_\Sigma)} = S_0\left(1+\frac{i-\alpha_\Sigma}{1+\alpha_\Sigma}\right) = S_0(1+i_{p\alpha}).$$

Из последнего равенства можно записать формулу для реально действующей в условиях инфляции годовой процентной ставки доходности $i_{p\alpha}$

$$i_{p\alpha} = \frac{i-\alpha_\Sigma}{1+\alpha_\Sigma}. \qquad (1.27)$$

На рис. 1.6 приведены графики зависимости реальной годовой процентной ставки от суммарного годового уровня инфляции. Из приведенных графиков и формулы (1.27) видно, что реальная годовая процентная ставка доходности $i_{p\alpha}$ будет положительной только тогда, когда уровень инфляции меньше годовой процентной ставки $\alpha_{\Sigma} < i$. При $\alpha_{\Sigma} > i$, несмотря на вложение денежных средств с обещанной доходностью i %, фактически первоначальная вложенная сумма S_0 будет обесцениваться.

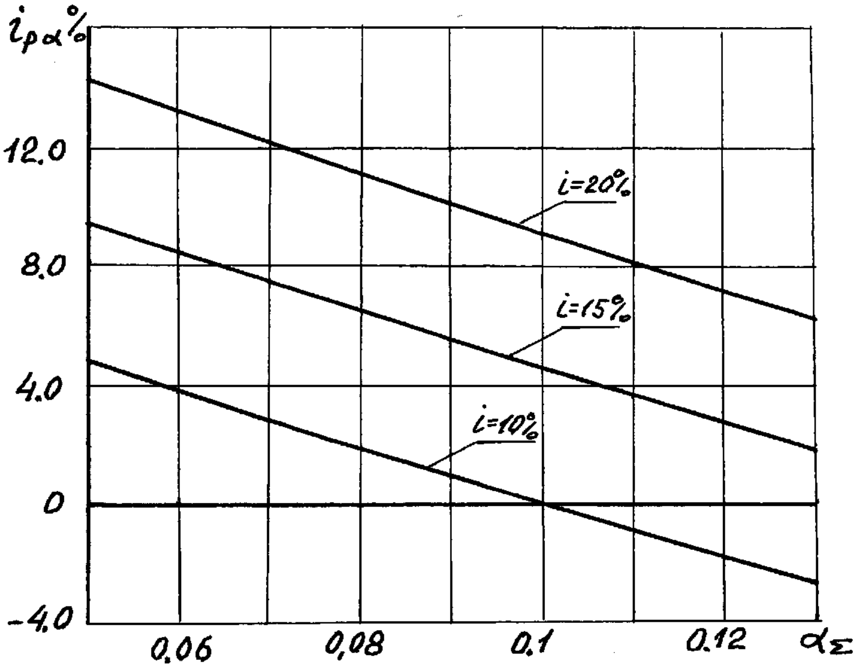

Рис. 1.6. Зависимость реальной процентной ставки от уровня инфляции

Часто возникает обратная задача – определить, под какую годовую процентную ставку i нужно разместить денежные средства, чтобы через год при заданном годовом уровне инфляции α_{Σ} получить желаемое значение реально действующей, с учетом инфляции, процентной ставки $i_{p\alpha}$. При такой постановке в формуле (1.27) известными являются величины α_{Σ} и $i_{p\alpha}$, а определить нужно i.

В результате преобразований формулы (1.27) получим

$$i = i_{p\alpha}(1+\alpha_{\Sigma}) + \alpha_{\Sigma}.$$

1) Определим реально действующую процентную ставку с учетом инфляции при вложении денежных средств на депозитный договор сроком на n месяцев при ежемесячном начислении процентов по схеме простых процентов.

При начислении простых процентов наращенную сумму S_n с учетом данных о ежемесячной инфляции $\alpha_k, k = 1 \div n$ можно определить по формуле:

$$S_n = S_0 \frac{1+\frac{n}{12}i}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\alpha_k)} = S_0 \frac{1+\frac{n}{12}i}{1+\alpha_{\Sigma n}}.$$

По аналогии с формулой (1.27) можно получить реальную, действующую с учетом инфляции, доходность выше оговоренной финансовой операции по вложению суммы S_0 на депозит

$$\mu_{n\alpha} = \frac{\frac{n}{12}i - \alpha_{\Sigma n}}{1+\alpha_{\Sigma n}}, \tag{1.28}$$

где $\alpha_{\Sigma n}$ - суммарный уровень инфляции за n месяцев депозитного договора.

Поставим обратную задачу. Определим, при какой годовой процентной ставке по депозитному договору доходность данной финансовой операции будет не меньше, чем $\mu_{n\alpha} = \mu$. Из формулы (1.28) получим:

$$i \geq \frac{12}{n}[\mu(1+\alpha_{\Sigma n}) + \alpha_{\Sigma n}]. \tag{1.29}$$

Из формулы (1.29) следует, что для получения реальной доходности $\mu = 10$ % при вложении денежных средств на депозитный договор на срок 12 месяцев при суммарной годовой инфляции $\alpha_{\Sigma} = 8$ % годовая процентная ставка по депозиту должна быть не меньше 18,8 %.

2) Определим реально действующую процентную ставку с учетом инфляции при вложении денежных средств S_0 на депозитный договор на n месяцев при ежемесячном начислении процентов по схеме сложных процентов.

Наращенную сумму S_n с учетом данных о ежемесячной инфляции α_k, $k = 1 \div n$ можно определить по формуле:

$$S_n = S_0 \frac{\left(1+\frac{i}{12}\right)^n}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\alpha_k)} = S_0 \left(\frac{1+\frac{i}{12}}{1+\alpha_{cp\,n}}\right)^n,$$

где $\alpha_{cp\,n}$ - средний за период n месяцев уровень ежемесячной инфляции, определяемой по формуле (1.25).

Определяя реальную доходность вложения денежных средств на депозит на n месяцев по схеме сложных процентов, можно записать:

$$S_n = S_0(1+\mu_{n\alpha}) = S_0\left(\frac{1+\frac{i}{12}}{1+\alpha_{cp\,n}}\right)^n,$$

$$\mu_{n\alpha} = \left(\frac{1+\frac{i}{12}}{1+\alpha_{cp\,n}}\right)^n - 1. \qquad (1.30)$$

Определим, при какой годовой процентной ставке по депозитному договору на n месяцев при ежемесячном начислении процентов доходность данной финансовой операции с учетом инфляции будет не меньше, чем $\mu_{n\alpha} = \mu$. Из формулы (1.30) получим:

$$i \geq 12[\sqrt[n]{1+\mu}(1+\alpha_{cp\,n})-1]. \qquad (1.31)$$

Определим значение i при $\mu = 10\ \%$. При суммарной годовой инфляции $\alpha_\Sigma = 8\ \%$ среднемесячный уровень инфляции будет равен $\alpha_{cp} = 0{,}6473\ \%$. Тогда при вложении денежных средств на депозит на 12 месяцев с ежемесячным начислением процентов по схеме сложных процентов годовая процентная ставка по депозиту должна быть не меньше 17,5 %.

1.6. Учет налогов при совершении финансовых операций

Рассмотрим методику учета налогов при определении эффективной процентной ставки по банковским вкладам на депозит и при получении банковских кредитов.

1) *Учет налогов по депозитным договорам*

Проценты по вкладам в коммерческом банке не облагаются налогами, если они не превышают ставку рефинансирования Центрального банка России, увеличенную на 5 %. Обозначим это пороговое значение $i_0 = i_{ЦБ} + 5\ \%$. В противном случае при $i > i_0$ с суммы доходов по процентам, превышающим ставку i_0, взимается налог $g_н = 35\ \%$.

Рассчитаем эффективную процентную ставку для данного случая. Наращенную величину вклада по истечении года можно определить по формуле:

$$S = S_0[(1+i) - g_н(i-i_0)] = S_0[1+i(1-g_н)+g_н i_0] = S_0(1+i_{эф}).$$

Отсюда для эффективной процентной ставки при наличии налоговых отчислений $(i > i_0)$ получим:

$$i_{эф} = i(1-g_н) + g_н i_0. \qquad (1.32)$$

Пример. Вклад помещен в банк под 17 % годовых $i = 17\ \%$. Найти эффективную процентную ставку по вкладу при ставке рефинансирования Банка России $i_{реф} = 8\ \%$.

Решение. Определяем ставку отсечения

$$i_0 = i_{реф} + 5\ \% = 8\ \% + 5\ \% = 13\ \%.$$

По формуле (1.32) вычисляем эффективную процентную ставку при ставке налога $g_н = 35\ \%$.

$$i_{эф\,н} = 0{,}17(1 - 0{,}35) + 0{,}35 \cdot 0{,}13 = 0{,}156.$$

Таким образом, реальная эффективная процентная ставка с учетом уплаченных налогов будет равна 15,6 %, т. е. на 1,4 % ниже объявленной банком процентной ставки по вкладу.

2) *Учет налогов по кредитным договорам*

Проценты за кредит исключаются из налогооблагаемой базы налога на прибыль организации, если они не превышают ставку отсечения i_0 по рублевым кредитам, j_0 - по валютным кредитам.

Для рублевых кредитов i_0 превышает ставку рефинансирования $i_{реф}$ Банка России на несколько процентных пунктов.

Определим эффективную процентную ставку по кредиту, если процентная ставка, указанная в кредитном договоре *i*, не превышает ставку отсечения $i < i_0$. В этом случае платежи в счет погашения кредита, выплачиваемые из чистой прибыли (после уплаты налога на прибыль), можно определить по формуле:

$$i \cdot D - g_н iD = iD(1 - g_н) = i_{эф\,н} D,$$

где D – сумма кредита.

Отсюда для эффективной процентной ставки получим:

$$i_{эф\,н} = i(1 - g_н). \tag{1.33}$$

Величину $(1 - g_н)$ называют налоговым щитом. Она показывает финансовую выгоду компании при использовании заемного капитала.

Если процентная ставка по кредиту *i*, указанная в кредитном договоре, превышает ставку отсечения $i > i_0$, то из платы процентов за кредит iD вычитается только величина $i_0 D$. С учетом этого для эффективной процентной ставки получим:

$$iD - i_0 g_н D = D[i - i_0 g_н] = D[i(1 - g_н) + g_н(i - i_0)].$$

Приравнивая данное выражение значению $Di_{эф\,н}$ для эффективной процентной ставки по кредиту, получим:

$$i_{эф\,н} = i(1 - g_н) + g_н(i - i_0). \tag{1.34}$$

При $i < i_0$ разность $i - i_0$ в формуле (1.34) должна быть взята равной нулю и формула (1.34) совпадает с формулой (1.33).

Пример. Кредит взят под 20 % годовых. Найти эффективную кредитную процентную ставку, если ставка отсечения равна $i_0 = i_{реф} \cdot 1{,}1 = 8\% \cdot 1{,}1 = 8{,}8$ %, а ставка налога на прибыль равна $g_н = 20$ %.

Решение. Так как $i > i_0$, то $i_{эф\,н}$ рассчитываем по формуле (1.34):

$$i_{эф\,н} = 0{,}2(1 - 0{,}2) + 0{,}2(0{,}2 - 0{,}088) = 0{,}1824.$$

Таким образом, реально выплаченная эффективная процентная ставка по кредиту равна 18,24 %, т. е. на 1,76 % меньше процентной ставки, указанной в кредитном договоре.

1.7. Операции с валютой

Возможность конвертации рублей в валюту и обратно валюты в рубли, а также возможность получения доходов от размещения на депозитах как рублевых, так и валютных вкладов увеличивают число возможных схем проведения данных финансовых операций.

Предположим, что в наличии имеются временно свободные средства в российских рублях R, в долларах США $ и в евро €. Сравним доходы от размещения на депозите имеющихся денежных средств.

Возможны следующие схемы получения дохода:

- Без конвертации валюты

1) R → R
2) $ → $
3) € → €

- С конвертацией валюты

4) R → $ → $ → R
5) R → € → € → R
6) $ → R → R →$
7) € → R → R → €
8) $ → € → € → $
9) € → $ → $ →€

Для сравнения доходности всех указанных схем финансовых операций введем следующие обозначения:

P_R – сумма депозитного вклада в рублях;

$P_\$$ – сумма депозитного вклада в долларах США;

$P_€$ – сумма депозитного вклада в евро;

S_R; $S_\$$; $S_€$ - наращенная за срок депозита сумма в рублях, долларах США и евро соответственно;

$K_{\$R0}$; $K_{\$R1}$ – обменный курс долларов США в рубли в начале и в конце финансовой операции соответственно;

$K_{€R0}$; $K_{€R1}$ – обменный курс евро в рубли в начале и в конце финансовой операции соответственно;

$K_{\$€0}$; $K_{\$€1}$ – обменный курс долларов США в евро в начале и в конце финансовой операции соответственно;

n – срок депозита;

i – годовая процентная ставка по депозиту в рублях;

$j_{\$}$ - годовая процентная ставка по депозиту в долларах США;

$j_{€}$ - годовая процентная ставка по депозиту в евро.

Получим формулы для оценки доходности финансовых операций для всех схем с конвертацией валюты.

Для финансовых операций без конвертации валюты по схемам 1-3 формулы для определения наращенных сумм и множителей наращения приведены в п. 1.2 и 1.3.

При наличии временно свободных средств во всех трех валютах P_R; $P_{\$}$ и $P_{€}$ как средство снижения рисков потерь при изменении обменного курса валют рекомендуется их размещение на мультивалютном вкладе.

Рассмотрим эту финансовую операцию на конкретном примере.

Пример. В банке открыт мультивалютный вклад: 100 тыс. руб. под 13 % годовых; 5 тыс. долл. США под 5 % годовых и 10 тыс. евро под 4 % годовых. Найти эффективную процентную ставку мультивалютного вклада, если курсы обмена валют в начале и в конце годового срока депозита равны 30 и 52; 40 и 62 руб. соответственно.

Решение. Через год наращенные суммы будут равны:

$$S_R = P_R(1 + i) = 100 \text{ тыс. руб. } (1 + 0{,}13) = 113 \text{ тыс. руб.}$$

$$S_{\$} = P_{\$}(1 + j_{\$}) = 5000\ (1 + 0{,}05) = 5250\ \$.$$

$$S_{€} = P_{€}(1 + j_{€}) = 10000\ (1 + 0{,}04) = 10400\ €.$$

Конвертируя первоначальные и наращенные суммы по курсам обмена валют на начало и окончание срока депозита, получим:

$$S_{R0} = 100000 + 5000 \text{ x } 30 + 10000 \text{ x } 40 = 650 \text{ тыс. руб.}$$

$$S_{R1} = 113000 + 5250 \text{ x } 52 + 10400 \text{ x } 62 = 1030{,}8 \text{ тыс. руб.}$$

Эффективная процентная ставка по мультивалютному вкладу с учетом изменения обменного курса валют определяется по формуле:

$$S_{R1} = S_{R0}(1 + i_{эф});. \quad i_{эф} = \frac{S_{R1}}{S_{R0}} - 1.$$

Откуда получим:

$$i_{эф} = \frac{1030{,}8}{650} - 1 \approx 0{,}586.$$

Если бы обменный курс валют не изменился, то наращенная сумма в рублях была бы равна:

$$S'_{R1} = 113000 + 5250 \times 30 + 10400 \times 40 = 686{,}5 \text{ тыс. руб.},$$

а эффективная процентная ставка составила бы:

$$i_{эф} = \frac{686{,}5}{650} - 1 \approx 0{,}056.$$

Если обменный курс валют не меняется, то эффективная процентная ставка равна средневзвешенному значению:

$$i_{эф} = i\frac{P_{\text{R}}}{S_{\text{R}0}} + j_{\$}\frac{P_{\$}K_{\$\text{R}}}{S_{\text{R}0}} + j_{\in}\frac{P_{\in}K_{\in\text{R}}}{S_{\text{R}0}} =$$

$$= 0{,}13\frac{100}{650} + 0{,}05\frac{5\times 30}{650} + 0{,}04\frac{10\times 40}{650} = 0{,}056.$$

Последние шесть схем предполагают конвертацию валюты как в начале, так и в конце финансовой операции.

4. Для наращенной суммы по четвертой схеме получим:

– по депозитному договору с начислением простых процентов:

$$S_R = \frac{P_R}{K_{\$R0}}(1 + nj_{\$})K_{\$R1}; \tag{1.35}$$

– по депозитному договору с начислением сложных процентов:

$$S_R = \frac{P_R}{K_{\$R0}}(1 + j_{\$})^n K_{\$R1}. \tag{1.36}$$

Множители наращения в схеме простых и сложных процентов можно записать в виде:

$$M_{пр} = \frac{K_{\$R1}}{K_{\$R0}}(1 + nj_{\$}); \quad M_{сл} = \frac{K_{\$R1}}{K_{\$R0}}(1 + j_{\$})^n. \tag{1.37}$$

Из приведенных формул видно, что множитель наращения увеличивается с повышением годовой процентной ставки и с ростом обменного курса доллара к концу срока депозита.

5. Для пятой схемы совершения финансовой операции:

Наращенные суммы по схеме простых и сложных процентов определяются формулами:

$$S_R = \frac{P_R}{K_{\in R0}}(1 + nj_{\in})K_{\in R1}; \quad S_R = \frac{P_R}{K_{\in R0}}(1 + j_{\in})^n K_{\in R1}. \tag{1.38}$$

Множители наращения для простых и сложных процентов будут соответственно равны:

$$M_{пр} = \frac{K_{\in R1}}{K_{\in R0}}(1 + nj_{\in}); \quad M_{сл} = \frac{K_{\in R1}}{K_{\in R0}}(1 + j_{\in})^n. \tag{1.39}$$

Из формул (1.39) видно, что (как и в схеме 4) множитель наращения увеличивается с повышением процентной ставки и с ростом обменного курса евро к концу срока депозитного договора.

6. Для шестой схемы финансовой операции:

Наращенные суммы в долларах США при начислении простых и сложных процентов соответственно будут равны:

$$S_{\$} = \frac{P_{\$} \cdot K_{\$R0}(1+ni)}{K_{\$R1}}; \quad S_{\$} = \frac{P_{\$} \cdot K_{\$R0}(1+i)^n}{K_{\$R1}}. \qquad (1.40)$$

Для множителей наращения при начислении простых и сложных процентов получим формулы:

$$M_{пр} = \frac{K_{\$R0}}{K_{\$R1}}(1+ni); \quad M_{сл} = \frac{K_{\$R0}}{K_{\$R1}}(1+i)^n. \qquad (1.41)$$

7. Для седьмой схемы финансовой операции:

Наращенные суммы в евро при начислении простых и сложных процентов определяются формулами:

$$S_{\in} = \frac{P_{\in} \cdot K_{\in R0}(1+ni)}{K_{\in R1}}; \quad S_{\in} = \frac{P_{\in} \cdot K_{\in R0}(1+i)^n}{K_{\in R1}}. \qquad (1.42)$$

Множители наращения при начислении простых и сложных процентов будут равны:

$$M_{пр} = \frac{K_{\in R0}}{K_{\in R1}}(1+ni); \quad M_{сл} = \frac{K_{\in R0}}{K_{\in R1}}(1+i)^n. \qquad (1.43)$$

Из формул (1.41) и (1.43) видно, что множители наращения в шестой и седьмой финансовых схемах увеличиваются с повышением процентной ставки по депозиту и с уменьшением обменного курса евро к рублю к окончанию срока депозита.

8. Для финансовой операции, реализуемой по восьмой схеме:

Наращенные суммы в долларах США при начислении простых и сложных процентов можно определить по формулам:

$$S_{\$} = \frac{P_{\$}}{K_{\$\in 0}}(1+nj_{\in})K_{\$\in 1}; \quad S_{\$} = \frac{P_{\$}}{K_{\$\in 0}}(1+j_{\in})^n K_{\$\in 1}, \qquad (1.44)$$

где $K_{\$\in}$ - обменный курс долларов США в евро может быть рассчитан по формуле $K_{\$\in} = \dfrac{K_{\$R}}{K_{\in R}}$.

Множители наращения для данной финансовой операции определяются формулами:

$$M_{пр} = \frac{K_{\$\in 0}}{K_{\$\in 1}}(1+nj_{\in}); \quad M_{сл} = \frac{K_{\$\in 0}}{K_{\$\in 1}}(1+j_{\in})^n. \qquad (1.45)$$

Множители наращения финансовой операции по восьмой схеме увеличиваются при повышении процентной ставки и увеличении обменного курса $K_{\$\in 1}$ к концу срока депозита.

9. Для финансовой операции, реализуемой по девятой схеме:

Наращенные суммы в евро при начислении простых и сложных процентов определяются формулам:

$$S_{\in} = P_{\in} K_{\in\$0} (1 + nj_{\$}) \frac{1}{K_{\in\$1}}; \quad S_{\in} = P_{\in} K_{\in\$0} (1 + j_{\$})^n \frac{1}{K_{\in\$1}}, \tag{1.46}$$

где $K_{\in\$}$ - обменный курс покупки доллар США за евро, который может быть рассчитан по формуле $K_{\in\$} = \dfrac{K_{\in R}}{K_{\$R}}$.

Множители наращения в девятой схеме финансовой операции определяются формулами:

$$M_{пр} = \frac{K_{\in\$0}}{K_{\in\$1}} (1 + nj_{\$}); \quad M_{сл} = \frac{K_{\in\$0}}{K_{\in\$1}} (1 + j_{\$})^n. \tag{1.47}$$

Как следует из формул (1.47), множители наращения увеличиваются при повышении процентных ставок и снижении обменного курса евро в долларах США к окончанию срока депозитного договора.

Во всех схемах с конвертацией валюты наращенная сумма будет превышать первоначально вложенную сумму при $M > 1$. Из формул (1.47) следует, что множители ослабления будут больше единицы при соблюдении неравенств:

$$M_{пр} > 1 \ при \ \frac{K_{\in\$0}}{K_{\in\$1}} > \frac{1}{(1 + nj_{\$})}; \quad M_{сл} > 1 \ при \ > \frac{1}{(1 + j_{\$})^n}.$$

Аналогичные соотношения можно получить из формул (1.37), (1.39), (1.41), (1.43) и (1.45).

Контрольные вопросы и задания

1. Записать формулу для наращенной суммы при сроке депозита t дней с начислением процентов по схеме:

а) простых процентов;

б) сложных процентов.

2. Записать формулу для наращенной суммы при размещении средств S_0, последовательно вкладываемых на сроки n_1; n_2; ...; n_k с годовыми процентными ставками i_1; i_2; ..; i_k для случаев:

а) начисления простых процентов;

б) начисления сложных процентов.

3. На каком депозите будет более выгодным размещение средств при начислении простых процентов или при начислении сложных процентов при сроке депозита:

а) менее одного года;

б) более одного года.

4. Вычислить значение эффективной процентной ставки по депозиту при ежеквартальном начислении сложных процентов при годовой процентной ставке $i = 12$ %.

5. Какой вклад средств на депозит при начислении простых процентов более выгоден:

а) при однократном в год начислении процентов;

б) при ежеквартальном начислении процентов.

6. Пояснить понятия "математическое дисконтирование" и "банковский учет".

7. Привести формулы математического дисконтирования при размещении средств на срок t дней по схеме:

а) простых процентов;

б) сложных процентов.

8. Привести формулу математического дисконтирования при размещении средств по схеме сложных процентов на n лет с m-кратным начислением процентов.

9. Привести формулы дисконтирования при банковском учете векселей по схеме:

а) простых процентов;

б) сложных процентов.

10. Вексель стоимостью 100 тыс. руб. учитывается банком за 2 года до погашения по учетной ставке d = 10 %. Определить сумму средств, полученную векселедержателем, и дисконт банка при учете векселя:

а) по простой схеме дисконтирования;

б) по сложной схеме дисконтирования.

11. Записать формулу для реальной стоимости денежных средств в сумме S_0 по истечении одного года, если известны ежеквартальные темпы инфляции α_1; α_2; α_3; α_4.

12. Определить реально действующую с учетом инфляции ставку по депозиту, если годовая процентная ставка по депозиту i = 11 %, а годовой темп инфляции равен α_Σ = 8 %.

13. Определить, под какую годовую процентную ставку должен быть заключен депозитный договор, чтобы при годовой инфляции α = 8 % реально действующая с учетом инфляции процентная ставка составила не менее 5 %.

14. Определить реальную стоимость средств S_0 = 50 тыс. руб., размещенных в банке на полгода по схеме простых процентов с годовой процентной ставкой i = 12 % при ежемесячном темпе инфляции $\alpha_{ср}$ = 0,7 %.

15. Определить реальную стоимость средств S_0 = 40 тыс. руб., размещенных в банке на полтора года по схеме сложных процентов с годовой процентной ставкой i = 12 % при ежемесячном темпе инфляции α = 0,8 %.

16. Вклад помещен в банк под 18 % годовых. Найти эффективную процентную ставку по вкладу с учетом уплаты налога по ставке $g_н$ = 35 % при ставке рефинансирования ЦБ России $i_{реф}$ = 9 %.

17. В банке взят кредит под 19 % годовых. Найти эффективную процентную ставку по кредиту с учетом льготного налогообложения прибыли в части уплаты процентов по кредиту при ставке налога $g_н$ = 20 % и ставке рефинансирования ЦБ России $i_{реф}$ = 8 %.

18. Сумма 150 тыс. руб. положена в банк на валютный депозит в евро под $j_€$ = 6 % годовых на полгода при начислении сложных процентов. Определить сумму, полученную в рублях, по окончании срока депозита, если обменный курс евро/руб. на момент заключения и окончания депозитного договора составил K_0 = 75 руб., K_t = 80 руб.

19. Сумма 5 тыс. долларов США положена в банк на рублевый депозит под i = 10 % годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Определить сумму, полученную в долларах США по окончании срока депозита, если обменный курс \$ - R на момент заключения и окончания депозитного договора составил K_0 = 70 руб., K_t = 65 руб.

20. В банке открыт мультивалютный вклад сроком на 1 год на суммы 100 тыс. руб. под 10,5 % годовых; 2000 долл. США под 5 % годовых; 5000 евро под 4 % годовых. Найти эффективную процентную ставку мультивалютного вклада, если курсы обмена валют в начале и в конце срока депозита были соответственно равны $K_{\$R}$= (70 - 62), $K_{€R}$ = (85 - 75).

2. Финансовые потоки, ренты

2.1. Основные понятия финансовых потоков

Финансовые потоки имеют широкое распространение на практике. Примерами финансовых потоков являются выплаты заработной платы, налоговые отчисления компании, коммунальные платежи, выплаты в погашение кредита, выплаты процентных доходов по депозитным договорам, ценным бумагам и т. п.

Графическое представление финансового потока приведено на рис. 2.1.

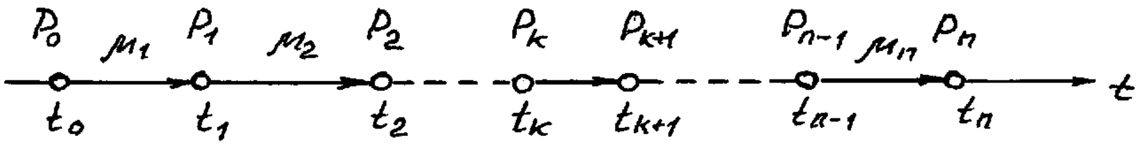

Рис. 2.1. Графическое представление финансового потока

Платеж *P*, произведенный в некоторый момент времени *t*, называют ***финансовым событием***, т. е. финансовое событие – это упорядоченная пара значений (*P*, *t*), определяющих размер платежа *P* и дату (время) платежа *t*.

Положительные платежи (со знаком плюс) означают поступление средств, отрицательные (со знаком минус) означают выплаты денежных средств.

Финансовые потоки могут быть как конечной последовательностью финансовых событий, так и бесконечной, они обозначаются символами *CF* (cash flow). Конечный финансовый поток, состоящий из (*n* + 1) финансовых событий, записывается в виде:

$$CF = \{(P_0, t_0); (P_1, t_1); (P_2, t_2); \ldots; (P_n, t_n)\}.$$

В общем случае платежи P_i $(i = 0 \div n)$ могут быть различными по величине, интервалы времени между соседними платежами $t_i - t_{i-1}$ $(i = 1 \div n)$ и доходность μ_i финансовых операций на этих интервалах также могут принимать различные значения.

Как было показано в разделе 1, деньги должны работать и приносить доход. Денежные средства сегодня в размере P_0 через время t_1 с учетом возможного дохода могут иметь стоимость $P_t = P_0(1+\mu_1)$. Поэтому непосредственно суммировать размеры платежей $P_0 + P_1 + P_2 + ..$, совершаемых в разное время, некорректно. Для того чтобы вычислить величину потока в какой-то момент времени $t_0 < t_k < t_n$, необходимо пересчитать все платежи от P_0 до P_{k-1} с учетом их наращенной стоимости, а все платежи $P_{k+1}; P_{k+2}; \ldots P_{n-1}; P_n$ дисконтировать к моменту времени t_k. Сумма всех платежей финансового потока, приведенных к некоторому моменту времени t_k, называется текущим или приведенным значением потока и обозначается PV_{t_k}. При начислении дохода по сложной процентной ставке i% годовых для PV_{t_k} можно записать:

$$
\begin{aligned}
PV_{t_k} &= P_0(1+i)^{\frac{t_k-t_0}{T}} + P_1(1+i)^{\frac{t_{k-1}-t_0}{T}} + \ldots + P_{k-1}(1+i) + \\
&+ P_k + \frac{P_{k+1}}{(1+i)} + \ldots + \frac{P_{n-1}}{(1+i)^{\frac{t_{n-1}-t_k}{T}}} + \frac{P_n}{(1+i)^{\frac{t_n-t_k}{T}}},
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $t_k - t_0$ - количество календарных дней с момента t_0 до t_k;

T – количество дней в году;

i – годовая процентная ставка доходности.

Текущее значение потока в момент времени t_0 называется современной величиной потока и обозначается просто PV без индекса:

$$
PV = P_0 + \frac{P_1}{(1+i)^{\frac{t_1-t_0}{T}}} + \frac{P_2}{(1+i)^{\frac{t_2-t_0}{T}}} + \ldots + \frac{P_n}{(1+i)^{\frac{t_n-t_0}{T}}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{P_i}{(1+i)^{\frac{t_i-t_0}{T}}}. \tag{2.2}
$$

Для момента t_n текущее значение потока называют конечным (накопленным) значением потока и обозначают FV.

$$
\begin{aligned}
FV &= P_0(1+i)^{\frac{t_n-t_0}{T}} + P_1(1+i)^{\frac{t_n-t_1}{T}} + \ldots + P_k(1+i)^{\frac{t_n-t_k}{T}} + \ldots \\
&\ldots + P_{n-1}(1+i)^{\frac{t_n-t_{n-1}}{T}} + P_n = \sum_{k=0}^{n} P_k(1+i)^{\frac{t_n-t_k}{T}}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Среди финансовых потоков важное место занимают потоки платежей через равные промежутки времени. Эти потоки называют ***финансовой рентой*** или просто рентой. Промежуток времени между двумя соседними платежами называется *периодом ренты*. Если в финансовой ренте, состоящей из n платежей, первый платеж совершается в момент времени t_0, а n-й платеж - в момент времени t_{n-1} (рис. 2.3), то такую ренту называют авансовой, или *пренумерандо*. Если первый платеж совершается в момент времени t_1, а последний - в момент времени t_n (рис. 2.2), то такая рента называется обыкновенной, подрасчетной, или *постнумерандо*. Промежуток времени между началом первого периода t_0 и окончанием последнего периода t_n называется сроком ренты. Если все платежи равны между собой $P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = P_4$, то такую ренту называют *постоянной*.

Ренты описываются следующими параметрами: размером отдельного платежа, периодом и сроком ренты, процентной ставкой i, числом платежей в году r (r – срочные ренты), а также методом начисления процентов – простые и сложные, частотой m начисления процентов в году (m – кратные ренты).

В случае, когда период ренты равен одному году, такую ренту называют годовой, или аннуитетом (annuity). В русскоязычной финансовой литературе аннуитетом называют постоянную ренту с произвольным периодом.

2.2. Коэффициенты приведения и наращения рент

2.2.1. Рента постнумерандо

Финансовый поток постоянной ренты постнумерандо можно записать в виде:

$$CF = \{(0,\ 0); (R,\ 1); (R,\ 2); \ldots; (R, n)\},$$

где R – размер платежей.

Графическое представление постоянной годовой ренты постнумерандо приведено на рис. 2.2.

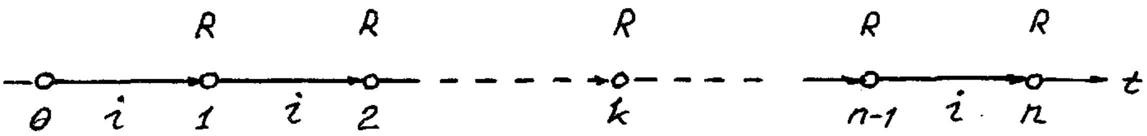

Рис. 2.2. Конечная годовая постоянная рента постнумерандо

Найдем современную стоимость ренты $PV = A$ постнумерандо. В соответствии с формулой (2.2) получим:

$$A = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}. \tag{2.4}$$

В правой части равенства (2.4) имеем сумму членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{1+i}$ и первым членом $a_1 = \frac{R}{1+i}$. Сумма n-членов геометрической прогрессии определяется формулой:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{2.5}$$

С учетом значений a_1 и q для современной стоимости ренты постнумерандо получим:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{2.6}$$

Множитель при R называют коэффициентом приведения ренты и обозначают $a_{n/i}$:

$$a_{n/i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (2.7)$$

Наращенная конечная сумма ренты обозначается $S=FV$ и определяется суммой (2.3):

$$S=R(1+i)^{n-1}+R(1+i)^{n-2}+\ldots+R.$$

Данная сумма является суммой n-членов возрастающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=(1+i)$ и первым членом R. В соответствии с формулой (2.5) получим:

$$S=R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}. \qquad (2.8)$$

Множитель при R называют коэффициентом наращения и обозначают $s_{n/i}$:

$$s_{n/i}=\frac{(1+i)^{n}-1}{i}. \qquad (2.9)$$

Из сравнения формул (2.7) и (2.9) следует:

$$s_{n/i}=a_{n/i}(1+i)^{n}. \qquad (2.10)$$

Коэффициенты приведения $a_{n/i}$ и наращения $s_{n/i}$ зависят только от процентной ставки i и срока ренты n.

Из формулы (2.10) можно записать соотношение между конечной S и современной A стоимостью ренты постнумерандо:

$$S=A(1+i)^{n}. \qquad (2.11)$$

2.2.2. Рента пренумерандо

Финансовый поток годовой постоянной ренты пренумерандо можно записать в виде:

$$CF=\{(R,\,0);(R,\,1);(R,\,2);\ldots;(R,n-1);(0,n)\}.$$

Графическое представление ренты пренумерандо приведено на рис. 2.3.

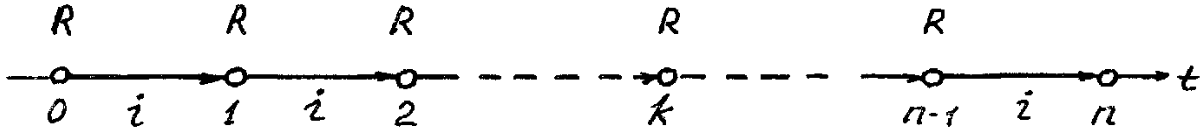

Рис. 2.3. Конечная годовая постоянная рента пренумерандо

Найдем современную стоимость ренты пренумерандо $PV=A^*$. В соответствии с формулой (2.2) получим:

$$A^*=R+\frac{R}{1+i}+\frac{R}{(1+i)^{2}}+\ldots+\frac{R}{(1+i)^{k}}+\frac{R}{(1+i)^{n-1}}.$$

Современная стоимость ренты пренумерандо определяется как сумма n-членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем

$q=(1+i)^{-1}$ и первым членом $a_1=R$. С учетом значений a_1; q формулы (2.5) для современной стоимости ренты пренумерандо получим:

$$A^*=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i). \tag{2.12}$$

Коэффициент приведения ренты пренумерандо определяется по формуле:

$$a^*_{n/i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i). \tag{2.13}$$

Наращенная сумма ренты пренумерандо в соответствии с формулой (2.3) определяется суммой:

$$S^*=R(1+i)^n+R(1+i)^{n-1}+\ldots+R(1+i)^{n-k+1}+\ldots+R(1+i)^2+R(1+i).$$

В правой части данного равенства имеем сумму n-членов возрастающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=(1+i)$ и первым членом $a_1=R(1+i)$. С учетом формулы (2.5) для конечной, наращенной суммы ренты пренумерандо получим:

$$S^*=R\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i). \tag{2.14}$$

Множитель при R является коэффициентом наращения ренты пренумерандо:

$$s_{n/i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i). \tag{2.15}$$

Из формул (2.13) и (2.15) видно, что соотношение между коэффициентами наращения $s^*_{n/i}$ и приведения $a^*_{n/i}$ определяется формулой, аналогичной формуле (2.10):

$$s^*_{n/i}=a^*_{n/i}(1+i)^n. \tag{2.16}$$

Аналогичной формулой определяется соотношение между конечной наращенной S^* и современной стоимостью A^* ренты пренумерандо

$$S^*=A^*(1+i)^n. \tag{2.17}$$

Из сравнения формул (2.6) и (2.12) можно выявить связь между современными стоимостями рент пренумерандо и постнумерандо:

$$A^*=A(1+i). \tag{2.18}$$

Из сравнения формул (2.8) и (2.14) следует аналогичная формула для соотношения конечных наращенных стоимостей рассматриваемых рент:

$$S^*=S(1+i). \tag{2.19}$$

Аналогичные соотношения можно получить для коэффициентов наращения и приведения рент постнумерандо и пренумерандо:

$$\begin{gathered} s^*_{n/i}=s_{n/i}(1+i) \\ a^*_{n/i}=a_{n/i}(1+i). \end{gathered} \tag{2.20}$$

2.3. Срочные ренты

Срочной называется рента, когда рентный платеж R производится не единовременно, один раз в год, а разбит на r одинаковых платежей, совершаемых r раз в год через равные промежутки времени.

Финансовый поток r-срочной ренты постнумерандо можно записать в виде:

$$CF = \left\{ \left(\frac{R}{r}, \frac{1}{r} \right); \left(\frac{R}{r}, \frac{2}{r} \right) \ldots \left(\frac{R}{r}, 1 \right); \left(\frac{R}{r}, \frac{r+1}{r} \right) \ldots \left(\frac{R}{r}, \frac{nr-1}{r} \right); \left(\frac{R}{r}, n \right) \right\}.$$

Графическое представление r-срочной ренты постнумерандо при $r = 4$ приведено на рис. 2.4:

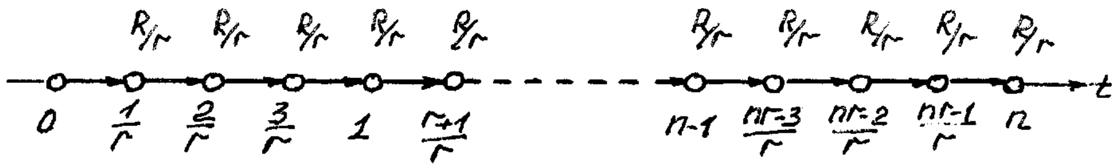

Рис. 2.4. ***r*-срочная рента постнумерандо**

Найдем современную стоимость r-срочной ренты постнумерандо, когда дисконтирование платежей осуществляется по схеме сложных процентов, т. е. множитель дисконтирования за один период $1/r$ будет равен $(1 + i)^{-1/r}$. С учетом данного множителя дисконтирования и формулы (2.3) для современной стоимости r-срочной ренты постнумерандо получим

$$A_{(r)} = \frac{R}{r(1+i)^{1/r}} + \frac{R}{r(1+i)^{2/r}} + \ldots + \frac{R}{r(1+i)^{nr/r}}.$$

В правой части данного равенства имеем nr-членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = (1+i)^{-1/r}$ и первым членом $a_1 = \frac{R}{r}(1+i)^{-1/r}$. С учетом формулы (2.5) для современной стоимости r-срочной ренты постнумерандо получим

$$A_{(r)} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{[(1+i)^{1/r}-1]r}. \tag{2.21}$$

Коэффициент приведения определяется множителем при R

$$a_{n/i}^{(r)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{r[(1+i)^{1/r}-1]}. \tag{2.22}$$

Конечная, наращенная стоимость r-срочной ренты в соответствии с формулой (2.4) определится суммой

$$S_{(r)} = \frac{R}{r} + \frac{R}{r}(1+i)^{1/r} + \frac{R}{r}(1+i)^{2/r} + \ldots + \frac{R}{r}(1+i)^{\frac{nr-1}{r}}.$$

Данная сумма записана в обратном порядке, т. е. первым слагаемым является последний платеж, вторым слагаемым – предпоследний платеж, а последнее слагаемое определяется первым платежом с учетом его множителя наращения за *nr*-1 периодов. В правой части данного равенства имеем сумму *nr*-членов возрастающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=(1+i)^{1/r}$ и первым членом $a_1=\frac{R}{r}$ с учетом формулы (2.5) для конечной, наращенной стоимости *r*-срочной ренты получим

$$S_{(r)}=\frac{R(1+i)^n-1}{r[(1+i)^{1/r}-1]}. \tag{2.23}$$

Коэффициент наращения *r*-срочной ренты постнумерандо определяется формулой

$$s_{n/i}^{(r)}=\frac{(1+i)^n-1}{r[(1+i)^{1/r}-1]}. \tag{2.24}$$

Из сравнения формул (2.21) с (2.23) и (2.22) с (2.24) видно, что для современной и конечной стоимостей, а также коэффициентов приведения и наращения *r*-срочной ренты постнумерандо справедливы формулы:

$$\begin{gathered}S_{(r)}=A_{(r)}(1+i)^n\\ s_{n/i}^{(r)}=a_{n/i}^{(r)}(1+i)^n.\end{gathered} \tag{2.25}$$

Получим формулы для расчета современной и конечной стоимостей *r*-срочной ренты пренумерандо. Финансовый поток для данной ренты можно записать в виде

$$CF=\left\{\left(\frac{R}{r};0\right);\left(\frac{R}{r};\frac{1}{r}\right);\left(\frac{R}{r};\frac{2}{r}\right);\ldots\left(\frac{R}{r};\frac{nr-1}{r}\right);\left(0;\frac{nr}{r}\right)\right\}.$$

Современная стоимость *r*-срочной ренты пренумерандо с учетом формулы (2.3) может быть записана в виде суммы

$$A_{(r)}^{*}=\frac{R}{r}+\frac{R}{r(1+i)^{1/r}}+\frac{R}{r(1+i)^{2/r}}+\ldots+\frac{R}{r(1+i)^{\frac{nr-1}{r}}}.$$

В правой части равенства имеем сумму *nr*-членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q(1+i)^{-1/r}$ и первым членом $a_1=\frac{R}{r}$, которая с учетом формулы (2.5) может быть записана в виде

$$A_{(r)}^{*}=\frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{r[(1+i)^{1/r}-1]}(1+i)^{1/r}. \tag{2.26}$$

Коэффициент приведения *r*-срочной ренты пренумерандо, являющийся множителем при *R*, определяется формулой

$$a_{n/i}^{*(r)}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{r[(1+i)^{1/r}-1]}(1+i)^{1/r}. \tag{2.27}$$

Конечная стоимость r-срочной ренты пренумерандо с учетом формулы (2.4) может быть записана в виде

$$S^*_{(r)} = \frac{R}{r}(1+i)^{1/r} + \frac{R}{r}(1+i)^{2/r} + \ldots + \frac{R}{r}(1+i)^{\frac{nr}{r}}.$$

В данной формуле первое слагаемое определяет значение платежа $\frac{R}{r}$, совершаемое в момент времени $\frac{nr-1}{r}$, пересчитанное к окончанию срока ренты, а последнее слагаемое определяет значение платежа $\frac{R}{r}$, пересчитанное за nr периодов к окончанию срока ренты. Правая часть данного равенства является возрастающей геометрической прогрессией со знаменателем $q(1+i)^{1/r}$, первым членом $a_1 = \frac{R}{r}(1+i)^{1/r}$, и ее сумма определяется формулой

$$S^*_{(r)} = R\frac{[(1+i)^n - 1]}{r[(1+i)^{1/r} - 1]}(1+i)^{1/r}. \tag{2.28}$$

Коэффициент наращения r-срочной ренты пренумерандо будет равен

$$s^{*(r)}_{n/i} = \frac{(1+i)^n - 1}{r[(1+i)^{1/r} - 1]}(1+i)^{1/r}. \tag{2.29}$$

Взаимосвязь между современной и конечной стоимостями, а также между коэффициентами наращения и приведения r-срочной ренты пренумерандо определяется аналогично формуле (2.25):

$$\begin{gathered} S^*_{(r)} = A^*_{(r)}(1+i)^n \\ s^{*(r)}_{n/i} = a^{*(r)}_{n/i}(1+i)^n. \end{gathered} \tag{2.30}$$

При сравнении стоимостных показателей r-срочных рент постнумерандо и пренумерандо получим формулы

$$\begin{gathered} S^*_{(r)} = S_{(r)}(1+i)^{1/r}; \quad A^*_{(r)} = A_{(r)}(1+i)^{1/r} \\ s^{*(r)}_{n/i} = s^{(r)}_{n/i}(1+i)^{1/r}; \quad a^{*(r)}_{n/i} = a^{(r)}_{n/i}(1+i)^{1/r}. \end{gathered} \tag{2.31}$$

2.4. Расчет *r*-срочной ренты при погашении кредита

Рассмотрим применение формул для определения стоимости r-срочной ренты при расчете графика аннуитета в погашении задолженности по кредиту. Расчет будем проводить для следующих условий. В банке взят кредит на сумму D рублей под годовую процентную ставку i сроком на n лет. Погашение кредита осуществляется r раз в год равными платежами размером R_r рублей.

В сумму платежа входят платеж в погашение тела кредита ΔD_i и проценты за пользование кредитом Π_i. Сумма кредита D выплачивается ссудозаемщику единовременно в день подписания кредитного договора. Поток платежей в погашение кредита является r-срочной рентой постнумерандо.

Так как сумма кредита D выплачивается в момент времени t_0, то эта сумма, по сути, равна современной стоимости r-срочной ренты, выплачиваемой в погашение кредита

$$D = A_{(r)} = R_r \frac{1-(1+i)^{-n}}{[(1+i)^{1/r}-1]}, \tag{2.32}$$

где $R_r = \dfrac{R}{r}$ - размер разового платежа.

$$R_r = \frac{D[(1+i)^{1/r}-1]}{1-(1+i)^{-n}}. \tag{2.33}$$

В соответствии с формулой (1.8) определим сумму процентов $П_1$, выплачиваемых банку за пользование кредитом в сумме D рублей за время $1/r$ лет до первого платежа

$$П_1 = D[(1+i)^{1/r}-1]. \tag{2.34}$$

Сумма ΔD_1, выплачиваемая в погашение тела кредита, будет равна

$$\Delta D_1 = R_r - П_1 = \frac{D[(1+i)^{1/r}-1](1+i)^{-n}}{[1-(1+i)^{-n}]}. \tag{2.35}$$

Тогда сумма задолженности по кредиту после первого платежа составит

$$D_1 = D - \Delta D_1 = D\left\{1 - \frac{[(1+i)^{1/r}-1](1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-n}}\right\}. \tag{2.36}$$

Сумма процентов $П_2$, выплачиваемых за пользование кредитом при втором платеже, будет равна

$$П_2 = D_1[(1+i)^{1/r}-1]. \tag{2.37}$$

Сумма ΔD_2, выплачиваемая в погашение тела кредита при втором платеже, определится разностью

$$\Delta D_2 = R_r - П_2,$$

а задолженность по кредиту после второго платежа определится формулой

$$D_2 = D_1 - \Delta D_2 = D - (R_r - П_1) - (R_r - П_2) = D - 2R_r + П_1 + П_2. \tag{2.38}$$

Сумма процентов $П_k$, выплачиваемых за пользование кредитом при k-м платеже, и задолженность по кредиту после k-го платежа D_k определяются формулами

$$\begin{aligned} &\Pi_k = D_{k-1} \times [(1+i)^{1/r} - 1] \\ &\Delta D_k = R_r - \Pi_k \\ &D_k = D - kR_r + \sum_{j=1}^{k} \Pi_j. \end{aligned} \qquad (2.39)$$

Общее число платежей в погашение кредита равно nr. Размер последнего платежа R_{nr} должен полностью погасить задолженность по кредиту и проценты за пользование кредитом.

Задолженность по телу кредита перед последним платежом будет равна

$$D_{nr-1} = D - (nr-1)R_r + \sum_{j=1}^{nr-1} \Pi_j. \qquad (2.40)$$

Проценты по кредиту Π_{nr} и размер последнего платежа определяются формулами

$$\begin{aligned} &\Pi_{nr} = D_{nr-1}[(1+i)^{1/r} - 1] \\ &R_{nr} = D_{nr-1} + \Pi_{nr}. \end{aligned} \qquad (2.41)$$

В результате проведенных расчетов общая сумма уплаченных процентов за пользование кредитом будет равна

$$\Pi_\Sigma = \sum_{j=1}^{nr} \Pi_j ,$$

и должны соблюдаться следующие равенства

$$D + \Pi_\Sigma = \sum_{j=1}^{nr} \Delta D_j + \sum_{j=1}^{nr} \Pi_j = (nr-1)R_r + R_{nr}. \qquad (2.42)$$

Проведем расчет графика платежей в погашение кредита на конкретном примере.

Пример 2.1. В коммерческом банке взят потребительский кредит на сумму 100 тыс. руб. сроком на один год (n = 1) под 20 % годовых (i = 0,2). Погашение кредита осуществляется четырьмя (r = 4) ежеквартальными платежами. Рассчитать график платежей в погашение кредита.

Решение. По формуле (2.33) определяем размер разового квартального платежа

$$R_r = 10^5 \frac{[(1+0{,}2)^{1/4} - 1]}{1 - \dfrac{1}{1{,}2}} = 27981{,}09 \text{ руб.}$$

По формулам (2.34), (2.35) и (2.36) рассчитываем суммы выплачиваемые в погашение процентов по кредиту Π_1, тела кредита ΔD_1 и задолженность по кредиту после первого платежа

$$П_1 = 10^5[(1+0{,}2)^{1/4} - 1] = 10^5 \times 0{,}0466352 = 4663{,}52 \text{ руб.}$$

$$\Delta D_1 = 27981{,}09 - 4663{,}52 = 23317{,}57 \text{ руб.}$$

$$D_1 = 100000 - 23317{,}57 = 76682{,}43 \text{ руб.}$$

По формулам (2.39) рассчитываем аналогичные параметры графика платежей при k = 2 и 3.

$$П_2 = 76682{,}43 \times 0{,}0466352 = 3576{,}10 \text{ руб.}$$

$$\Delta D_2 = 27981{,}09 - 3576{,}10 = 24404{,}99 \text{ руб.}$$

$$D_2 = 76682{,}43 - 24404{,}99 = 52277{,}44 \text{ руб.}$$

$$П_3 = 52277{,}44 \times 0{,}0466352 = 2437{,}97 \text{ руб.}$$

$$\Delta D_3 = 27981{,}09 - 2437{,}97 = 25543{,}12 \text{ руб.}$$

$$D_3 = 52277{,}44 - 25543{,}12 = 26734{,}32 \text{ руб.}$$

Для последнего четвертого платежа параметры графика платежей по кредиту рассчитываем по формулам (2.40):

$$П_4 = 26734{,}32 \times 0{,}0466352 = 1246{,}76 \text{ руб.}$$

$$R_4 = 26734{,}32 + 1246{,}76 = 27981{,}09 \text{ руб.}$$

Результаты расчета графика платежей сведены в табл. 2.1.

Приведенные выше формулы и расчеты справедливы, когда банк рассчитывает доходность по кредиту по схеме сложных процентов.

Таблица 2.1

№ платежа	**Размер платежа, руб.**	**Погашение кредита, руб.**	**Проценты за кредит, руб.**	**Текущая задолженность по кредиту, руб.**
1	27981,09 28200	23317,57 23200	4663,52 5000	76682,43 76800
2	27981,09 28200	24404,99 24360	3576,10 3840	52277,44 52440
3	27981,09 28200	25543,12 25580	2437,97 2620	26734,32 26860
4	27981,09 28200	26734,32 26860	1246,76 1340	0 0
Итого	111924,36 112800	100000 100000	11924,36 12800	0 0

Пример 2.1а. Для сравнения приведем результаты расчетов графика платежей, когда процентные доходы по кредиту банк рассчитывает не по формуле (2.34), а по процентной ставке i_r, пересчитанной к временному интервалу между платежами

$$i_r = \frac{i}{r}, \qquad (2.43)$$

где i – годовая процентная ставка;

r – количество платежей в году.

В этом случае для расчета размера разовых платежей нужно использовать формулу (2.6):

$$R_r = D\frac{i_r}{1-(1+i_r)^{rn}}. \quad (2.44)$$

Проведем расчет графика платежей по кредиту при ставке доходности, определяемой формулой (2.43), для условий кредитования, указанных в рассматриваемом примере.

Определим размер разовых платежей

$$R_r = 10^5 \frac{0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-4}} \approx 28200 \text{ руб.}$$

Определяем сумму процентов $П_1$, уплачиваемых за пользование кредитом, и сумму ΔD_1, выплачиваемую в погашение тела кредита при первом платеже

$$П_1 = i_r D = 10^5 \cdot 0{,}05 = 5000 \text{ руб.}$$

$$\Delta D_1 = 28020 - 5000 = 23200 \text{ руб.}$$

Сумма задолженности по кредиту после первого платежа будет равна

$$D_1 = 100000 - 23200 = 76800 \text{ руб.}$$

Рассчитываем суммы $П_к$, ΔD_k и D_k на втором k = 2 и третьем k = 3 платеже

$$П_2 = D_1 i_r = 76800 \times 0{,}05 = 3840 \text{ руб.}$$

$$\Delta D_2 = 28020 - 3840 = 24360 \text{ руб.}$$

$$D_2 = 76650 - 24360 = 52440 \text{ руб.}$$

$$П_3 = 52440 \times 0{,}05 = 2620 \text{ руб.}$$

$$\Delta D_3 = 28020 - 2620 = 25580 \text{ руб.}$$

$$D_3 = 52440 - 25580 = 26860 \text{ руб.}$$

При четвертом платеж процентные доходы банка составят

$$П_4 = D_3 i_r = 26860 \times 0{,}05 = 1340 \text{ руб.},$$

а размер четвертого платежа будет равен

$$R_4 = D_3 + П_4 = 26860 + 1340 = 28200 \text{ руб.}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 2.1 (под диагональной чертой). Из сравнения результатов расчета видно, что для банка выгоднее, когда процентные доходы банка начисляются по ставке, определяющейся формулой (2.43). Банковская методика расчета графика платежей по кредиту совпадает с методикой, приведенной в примере 2.1.

2.5. Валютные кредиты

Рассмотрим возможные схемы валютных операций при кредитовании и погашении кредитов. Первая схема, имеющая печальные последствия на рубеже 2014-2015 годов, характерна для ипотечного кредитования.

I. Потенциальному ссудозаемщику необходима некоторая сумма в рублях D_R. Для получения ссудозаемщик решил взять кредит в иностранной валюте под годовую процентную ставку j_B на сумму $D_B = D_R / K_{BRO}$, где K_{BRO} - обменный курс валюты в рубли на момент заключения кредитного договора. Погашение кредита осуществляется постоянными платежами r раз в год в валюте кредита R_B. Ссудозаемщик имеет только рублевые доходы, и погашение валютных платежей он осуществляет за счет рублевых доходов, конвертируя их в валюту по обменному курсу K_{BRk} на очередной k-й момент оплаты кредита.

Результаты данной финансовой операции целесообразно сравнивать с примером, рассмотренным в п. 2.4 при рублевом кредитовании.

Для сопоставимости результатов кредитования по данной схеме и с примером, рассмотренным в п. 2.4, примем следующие условия предоставления валютного кредита.

Размер валютного кредита D_B определяется из условия эквивалентности его 100 тыс. руб. на момент заключения кредитного договора при курсе обмена валюты в рубли $K_{BRO} = 40$. Кредитный договор заключается на один год под годовую процентную ставку j_B = 8 % годовых. Погашение кредита осуществляется четырьмя ежеквартальными платежами r = 4. Будем считать, что обменный курс валюты за срок кредитного договора изменяется линейно (рис. 2.5)

$$K_{BR}(k) = \delta k + K_{BRO}, \tag{2.45}$$

где $k = (1 \div r)$ - номер очередного платежа в погашение валютного кредита;

$\delta = \dfrac{K_{BR}(r) - K_{BRO}}{r}$ - скорость нарастания или убывания обменного курса валюты.

Расчеты для приведенных выше условий дают следующие результаты:

1) Размер валютного кредита

$$D_B = \frac{D_P}{K_{BRO}} = \frac{100000}{40} = 2500 \text{ €}.$$

2) Для упрощения расчетов размер ежеквартальных платежей будем определять по методике, рассмотренной в примере 2.1а.

$$R_B = D_B \frac{j_B/4}{1-(1+j_B/4)^{-4}} = 2500\frac{0{,}02}{1-\left(\frac{1}{1{,}02}\right)^4} = R_B = 656{,}56 \text{ €}.$$

3) Размер ежеквартальных платежей в российских рублях, при скорости нарастания обменного курса валюты $\delta = 4$ руб./квартал

$$R_{R1} = R_B K_{BR}(1) = R_B[K_{BRO} + \delta] = 656{,}56 \cdot 44 = 28888{,}64 \text{ руб.}$$

$$R_{R2} = R_B[K_{BRO} + 2\delta] = 656{,}56 \cdot 48 = 31514{,}88 \text{ руб.}$$

$$R_{R3} = R_B[K_{BRO} + 3\delta] = 656{,}56 \cdot 52 = 34141{,}12 \text{ руб.}$$

$$R_{R4} = R_B[K_{BRO} + 4\delta] = 656{,}56 \cdot 56 = 36767{,}36 \text{ руб.}$$

4) Общая сумма в рублях, затраченная на погашение валютного кредита

$$S_R = \sum_{k=1}^{4} R_{RK} = 131312{,}0 \text{ руб.}$$

5) Общая сумма в рублях, затраченная на погашение кредита S_P, имеет линейную зависимость от δ

$$S_R = 4R_B K_{BRO} + 10\delta R_B.$$

6) Построим график зависимости S_R от δ. Для этого рассчитаем S_R при $\delta = 0$

$$S_R(\delta = 0) = 4R_B K_{BRO} = 4 \cdot 656{,}56 \cdot 40 = 105049{,}6 \text{ руб.}$$

Зависимость S_R от δ приведена на рис. 2.5. На этом же рисунке отмечена сумма, уплаченная в погашение рублевого кредита D = 100 тыс. руб. $S_R = 112800$ руб. (см. табл. 2.1).

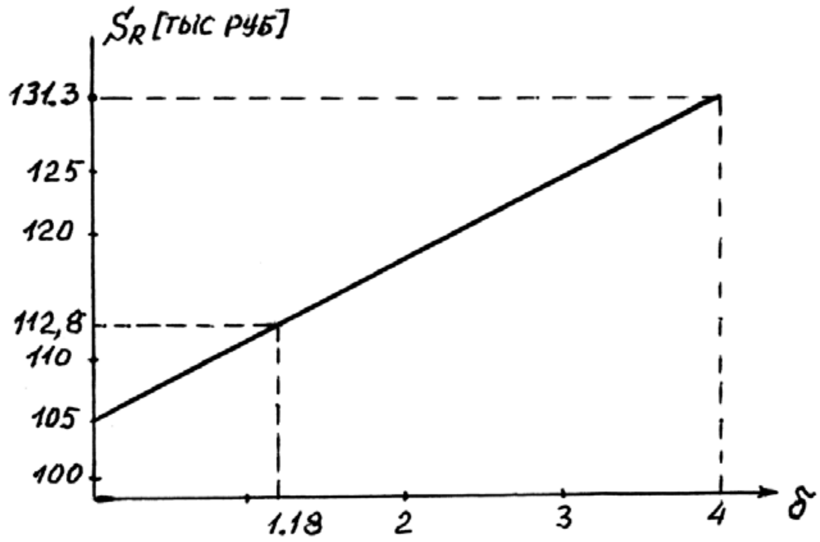

Рис. 2.5. Зависимость S_R от δ

Из рис. 2.5 можно сделать следующий вывод. При линейном нарастании обменного курса валюты (2.45) за срок кредитования валютный кредит оказывается выгоднее при скорости изменения обменного курса валюты $\delta < 1{,}18$. При $\delta > 1{,}18$ рублевая сумма, уплаченная в погашение валютного кредита $S_R^{(B)}$ (рис. 2.5), оказывается больше $S_R = 112800$ руб. суммы, уплаченной в погашение рублевого кредита.

Рассмотрим другие схемы валютного кредитования.

II. Потенциальный ссудозаемщик осуществляет внешнеэкономическую деятельность, от которой получает валютные доходы. Для продолжения ВЭД ссудозаемщику нужен кредит в размере $D_B = 2500$ €. Эта сумма может быть получена:

а) непосредственно в валюте под ставку валютного кредита $j_B = 8$ % годовых;

б) по рублевому кредиту по ставке $i = 20$ % годовых при сумме рублевого кредита $D_P = D_B K_{BRO}$ и курсе обмена валюты $K_{BRO} = 40$ руб.

В обоих случаях срок кредитования один год, кредит гасится ежеквартальными платежами из валютных доходов ссудозаемщика.

Определить, какой из видов кредитования (Пример 2.1 или Пример 2.1а) выгоднее при линейном изменении обменного курса валюты за срок кредитования. Размер разового валютного платежа можно рассчитать по формулам (2.33) или (2.44).

Рассчитаем размер ежеквартальных платежей при кредитовании по схеме **а** по формуле (2.44)

$$R_B = D_B \frac{j_B / 4}{1 - (1 + j_B / 4)^{-4}} = 2500 \frac{0{,}02}{1 + \left(\dfrac{1}{1{,}02}\right)^4} = 656{,}56 \text{ €}.$$

Рассчитаем данные по ежеквартальным платежам

1-й платеж $\Pi_1 = 2500 \cdot 0{,}02 = 50$ €

$$\Delta D_{B1} = 656{,}56 - 50 = 606{,}56 \text{ €}$$

$$D_{B1} = 2500 - 606{,}56 = 1893{,}44 \text{ €}$$

2-й платеж $\Pi_2 = 1893{,}44 \cdot 0{,}02 = 37{,}87$ €

$$\Delta D_{B2} = 656{,}56 - 37{,}87 = 618{,}69 \text{ €}$$

$$D_{B2} = 1893{,}44 - 618{,}69 = 1274{,}75 \text{ €}$$

3-й платеж $\Pi_3 = 1274{,}75 \cdot 0{,}02 = 25{,}5$ €

$$\Delta D_{B3} = 656{,}56 - 25{,}5 = 631{,}06 \text{ €}$$

$$D_{B3} = 1274{,}75 - 631{,}06 = 643{,}69 \text{ €}$$

4-й платеж $\Pi_4 = 643{,}69 \cdot 0{,}02 = 12{,}87$ €

$$\Delta D_{B4} = 643{,}69 \text{ €}$$

$$R_{B4} = 643{,}69 + 12{,}87 = 656{,}56 \text{ €}$$

Суммарные валютные выплаты в погашение валютного кредита составят

$$S_B = 4R_B = 2626{,}24 \text{ €}.$$

То есть переплата по кредиту будет равна

$$\Delta S_B = S_B - D_B = 2626{,}24 - 2500 = 126{,}24 \text{ €},$$

и эффективная процентная ставка по кредиту составляет

$$i_{эф} = \frac{\Delta S_B}{D_B} = \frac{126{,}24}{2500} \approx 0{,}05.$$

Рассчитаем график платежей R_B, вносимых из валютных доходов в погашение рублевого кредита (Пример 2.1а).

Рассчитаем размер необходимого рублевого кредита

$$D_P = D_B \cdot K_{BRO} = 2500 \cdot 40 = 100000 \text{ руб.}$$

Рассчитываем размер ежеквартальных платежей R_R

$$R_R = D_P \frac{i/4}{1-(1+i/4)^{-4}} = 10^5 \frac{0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-4}} \Rightarrow R_R = 28200 \text{ руб.}$$

Расчет графика платежей по данному кредиту приведен а табл. 2.1.

Так как рублевый кредит гасится из валютных доходов, рассчитаем сумму ежеквартальных выплат в валюте с учетом формулы (2.45) при $\delta = 4$ руб./квартал:

$$R_{B1} = \frac{R_R}{K_{BR1}} = \frac{R_R}{K_{BRO} + \delta} = \frac{28200}{40+4} = 640{,}91 \text{ €}$$

$$R_{B2} = \frac{R_R}{K_{BRO} + 2\delta} = \frac{28200}{48} = 587{,}5 \text{ €}$$

$$R_{B3} = \frac{R_R}{K_{BRO} + 3\delta} = \frac{28200}{52} = 542{,}31 \text{ €}$$

$$R_{B4} = \frac{R_R}{K_{BRO} + 4\delta} = \frac{28200}{56} = 503{,}57 \text{ €}.$$

Суммарные валютные выплаты на погашение рублевого кредита составят $S_{B\Sigma}(\delta = 4) = \sum_{k=1}^{4} R_{BK} = 2274{,}29$ €.

Аналогичным образом рассчитаем суммарные валютные выплаты $S_{B\Sigma}$ на погашение рублевого кредита при других значениях δ и построим график зависимости $S_{B\Sigma}(\delta)$ (рис. 2.6).

На рис. 2.6 отмечено также значение суммарных валютных выплат по погашению валютного кредита $S_{B\Sigma}(\delta) = 2626{,}24$ €. Из графика видно, что при $\delta > 1{,}2$ выгоднее оказывается получение кредита по схеме "б", а при $\delta > 2{,}1$ суммарные валютные выплаты по рублевому кредиту оказываются меньше, чем валютный размер кредита $S_{B\Sigma} < D_B = 2500$ €.

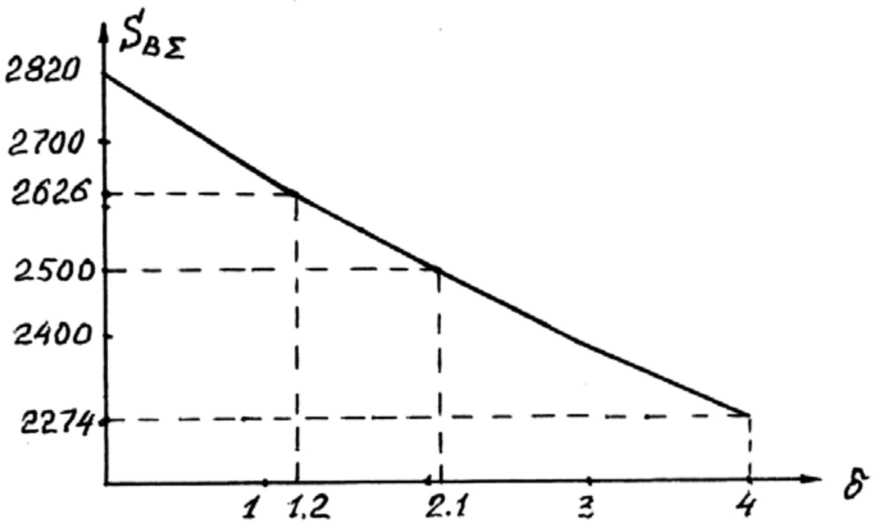

Рис. 2.6. График зависимости $S_B(\delta)$

2.6. Годовая и срочная ренты при *m*-кратном начислении процентов

Для годовой ренты постнумерандо при *m*-кратном начислении сложных процентов формулу (2.4) для современной стоимости ренты можно записать в виде

$$A^{(m)} = \frac{R}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m} + \frac{R}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{2m}} + \ldots + \frac{R}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}} =$$

$$= \frac{R}{(1+i_{эф})} + \frac{R}{(1+i_{эф})^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i_{эф})^n},$$

где $i_{эф}$ – определяется формулой (1.11).

Данная сумма является геометрической прогрессией с первым членом $\frac{R}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m} = \frac{R}{(1+i_{эф})}$ и знаменателем $q = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-m} = \left(1+i_{эф}\right)^{-1}$.

Отсюда для современной стоимости годовой ренты с *m*-кратным начислением процентов по аналогии с формулой (2.6) получим

$$A^{(m)} = R\frac{\left[1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}\right]}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1} = R\frac{\left[1-\left(1+i_{эф}\right)^{-n}\right]}{i_{эф}}. \qquad (2.46)$$

Из сравнения формул (2.46) и (2.6) видно, что формула (2.46) получается из формулы (2.6) путем замены в ней годовой процентной ставки *i* на эффективную годовую процентную ставку $i_{эф}$ при *m*-кратном начислении процентов (1.11). Коэффициент приведения для данной ренты будет равен

$$a_{n/i}^{(m)} = \frac{\left[1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}\right]}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1} = \frac{\left[1-\left(1+i_{эф}\right)^{-n}\right]}{i_{эф}}. \qquad (2.47)$$

Аналогично для конечной стоимости годовой ренты с m-кратным начислением процентов и коэффициента наращения можно получить формулы

$$S^{(m)} = R\frac{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1\right]}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1} = R\frac{\left[\left(1+i_{эф}\right)^{n}-1\right]}{i_{эф}}$$

$$s_{n/i}^{(m)} = \frac{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1\right]}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1} = \frac{\left(1+i_{эф}\right)^{n}-1}{i_{эф}}. \qquad (2.48)$$

Для ренты пренумерандо с m-кратным начислением процентов справедливы формулы

$$A^{*(m)} = R\frac{\left[1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}-1\right]}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} = R\frac{1-\left(1+i_{эф}\right)^{-n}}{i_{эф}}\left(1+i_{эф}\right)$$

$$s^{*(m)} = \frac{\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1\right]}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} = R\frac{\left(1+i_{эф}\right)^{n}-1}{i_{эф}}\left(1+i_{эф}\right). \qquad (2.49)$$

Для современной и конечной стоимости r-срочной ренты постнумерандо с m-кратным начислением процентов можно получить формулы

$$A_{(r)}^{(m)} = \frac{R}{r}\frac{1-\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{m/r}-1} = \frac{R}{r}\frac{[1-\left(1+i_{эф}\right)^{-n}]}{[(1+i_{эф})^{1/r}-1]}$$

$$S_{(r)}^{(m)} = \frac{R}{r}\frac{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{m/r}-1} = \frac{R}{r}\frac{[\left(1+i_{эф}\right)^{n}-1]}{[(1+i_{эф})^{1/r}-1]}. \qquad (2.50)$$

При $m = r$ формулы (2.50) преобразуются к виду

$$A_{(r=m)} = R\frac{1-\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{-mn}}{i} = R\frac{1-\left(1+i_{эф}\right)^{-n}}{i}$$

$$S_{(r=m)} = R\frac{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}-1}{i} = R\frac{\left(1+i_{эф}\right)^{n}-1}{i}. \qquad (2.51)$$

При вычислении современной и конечной стоимостей ренты пренумерандо формулы (2.50) и (2.51) необходимо умножить на $(1+i_{эф})$.

2.7. Арифметическая рента

В арифметической ренте величина периодических платежей представляет собой арифметическую прогрессию. Поток платежей арифметической ренты постнумерандо можно записать в виде

$$CF = \{[R;1];[R+Q;2];\ldots;[R+(n-1)Q;n]\},$$

где Q – разность арифметической прогрессии. Величина Q характеризует, насколько каждый последующий платеж отличается от предыдущего.

При $Q > 0$ арифметическая прогрессия будет возрастающей, при $Q < 0$ – убывающей.

Определим современную A и конечную, наращенную S стоимости арифметической ренты.

Приведенная современная стоимость арифметической ренты определяется суммой:

$$A_a = \sum_{k=1}^{n}\frac{R_a+(k-1)Q_a}{(1+i)^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{R_a}{(1+i)^k} + \frac{1}{(1+i)}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{mQ_a}{(1+i)^m}. \qquad (2.52)$$

Первая сумма в формуле (2.52) определяется формулой (2.6). Вторая сумма в (2.52) может быть записана в виде

$$\sum_{m=1}^{n-1}\frac{mQ_a}{(1+i)^m} = \frac{Q_a q(1+q^{n-1})}{(1-q)^2} - \frac{(n-1)Q_a q^n}{1-q}, \qquad (2.53)$$

где $q = \dfrac{1}{1+i}$.

Вторая сумма в формуле (2.52) может быть преобразована к виду

$$\frac{1}{1+i}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{mQ_a}{(1+i)^m} = Q_a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i^2} - \frac{n(1+i)^{-n}}{i}\right]. \qquad (2.54)$$

С учетом формул (2.6) и (2.54) современная стоимость арифметической ренты постнумерандо определится формулой

$$A_a = R_a a_{n/i} + Q_a\,\frac{a_{n/i} - n(1+i)^{-n}}{i}, \qquad (2.55)$$

где коэффициент приведения $a_{n/i}$ определяется формулой (2.7).

На рис. 2.7 приведен график зависимости современной стоимости арифметической ренты от отношения $\eta = Q/R$ для двух значений процентной ставки дисконтирования *i* и при *n* = 4.

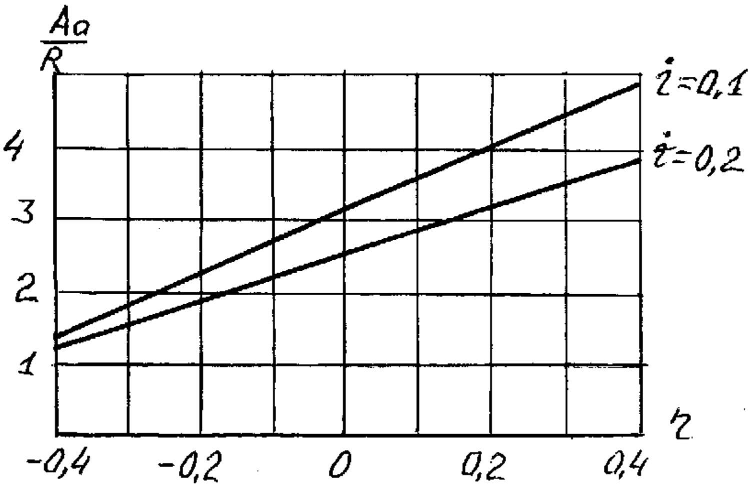

Рис. 2.7

Конечная наращенная стоимость арифметической ренты определяется суммой

$$S_a = R_a(1+i)^{n-1} + (R_a+Q_a)(1+i)^{n-2} + \ldots + [R_a + (k-1)Q_a](1+i)^{n-k} + \ldots +$$

$$+[R_a + (n-1)Q_a] = \sum_{k=1}^{n}[R_a + (k-1)Q_a](1+i)^{n-k} =$$

$$= (1+i)^n\sum_{k=1}^{n}[R_a + (k-1)Q_a](1+i)^{-k} = A_a(1+i)^n.$$

С учетом формулы (2.55) для конечной стоимости арифметической ренты получим

$$S_a = R_a s_{n/i} + Q_a\,\frac{s_{n/i} - n}{i}, \qquad (2.56)$$

где коэффициент наращения $s_{n/i}$ определяется формулой (2.9).

Для современной и конечной стоимостей арифметической ренты пренумерандо аналогично формулам (2.18) и (2.19) можно записать:

$$A_a^* = A_a(1+i); \qquad S_a^* = S_a(1+i).$$

Для r-срочной арифметической ренты постнумерандо поток платежей показан на рис. 2.4, в котором размер k-го платежа равен $\frac{R}{r} + (k-1)Q_r$, а количество платежей равно $n \cdot r$ $(1 \le k \le nr)$. Современная стоимость r-срочной арифметической ренты определится суммой

$$A_a^{(r)} = \frac{R/r}{(1+i)^{1/r}} + \frac{R/r + Q_r}{(1+i)^{2/r}} + \ldots + \frac{R/r + (k-1)Q_r}{(1+i)^{k/r}} + \ldots +$$
$$+ \frac{R/r + (nr-1)Q_r}{(1+i)^{nr/r}} = \sum_{k=1}^{nr} \frac{R/r + (k-1)Q_r}{(1+i)^{k/r}} = \tag{2.57}$$
$$= \sum_{k=1}^{nr} \frac{R}{r(1+i)^{k/r}} + \frac{Q_r}{(1+i)^{1/r}} \sum_{m=0}^{nr-1} \frac{m}{(1+i)^{m/r}}.$$

Первая сумма в формуле (2.57) является убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{1}{(1+i)^{1/r}}$, первым членом $a_1 = \frac{R}{r(1+i)^{1/r}}$ и определяется формулой (2.21).

Вторая сумма является арифметико-геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{1}{(1+i)^{1/r}}$ и в соответствии с формулой (2.53) может быть преобразована к виду:

$$\frac{Q_r}{(1+i)^{1/r}} \sum_{m=0}^{nr-1} \frac{m}{(1+i)^{m/r}} = Q_r \cdot r \left\{ \frac{1-(1+i)^{-n}}{[(1+i)^{1/r} - 1]^2} - \frac{n(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/r} - 1} \right\}. \tag{2.58}$$

В соответствии с формулами (2.21) и (2.58) для современной стоимости арифметической ренты постнумерандо получим формулу

$$A_a^{(r)} = Ra_{n/i}^{(r)} + Q_r \cdot r \frac{a_{n/i}^{(r)} - n(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/r} - 1}, \tag{2.59}$$

где коэффициент приведения $a_{n/i}^{(r)}$ определяется формулой (2.22).

Конечная, наращенная стоимость r-срочной арифметической ренты постнумерандо определится формулой

$$S_a^{(r)} = A_a^{(r)}(1+i)^n = Rs_{n/i}^{(r)} + Q_r \cdot r \frac{s_{n/i}^{(r)} - n}{(1+i)^{1/r} - 1}, \tag{2.60}$$

где коэффициент приведения $s_{n/i}^{(r)}$ определяется формулой (2.24).

2.8. Геометрическая рента

Геометрической называется рента, в которой каждый последующий платеж отличается в $1+\eta$ раз от предыдущего, т. е.

$$R_{i+1} = R_i(1+\eta).$$

Поток платежей такой ренты постнумерандо можно записать в виде

$$CF = \{[R;1],[R(1+\eta);2],\ldots,[R(1+\eta)^k;k+1],\ldots,[R(1+\eta)^{n-1};n]\}.$$

Размеры платежей в данном потоке представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+\eta)$, а параметр η является темпом прироста платежей, он определяет процентную долю, на которую отличается каждый последующий платеж от предыдущего.

Современная стоимость такой ренты равна сумме диконтированных платежей

$$A_Г = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R(1+\eta)}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R(1+\eta)^k}{(1+i)^{k+1}} + \ldots + \frac{R(1+\eta)^{n-1}}{(1+i)^n} =$$
$$= \frac{1}{1+i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{R(1+\eta)^k}{(1+i)^k} = \frac{R}{1+i}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(1+\eta)^{k-1}}{1+i}\right). \qquad (2.61)$$

Современная стоимость $A_Г$ является суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left(\frac{1+\eta}{1+i}\right)$ и первым членом $a_1 = \frac{R}{1+i}$. С учетом формулы (2.5) для современной стоимости геометрической ренты постнумерандо получим

$$A_Г = R\frac{1-\left(\frac{1+\eta)}{1+i}\right)^n}{i-\eta}. \qquad (2.62)$$

Формула (2.62) может использоваться только при $\eta \neq i$. При $\eta = i$ формула (2.61) преобразуется к виду

$$A_Г = \frac{R}{1+i}\sum_{k=1}^{n}1^{k-1} = \frac{nR}{1+i} \quad при \quad \eta = i. \qquad (2.63)$$

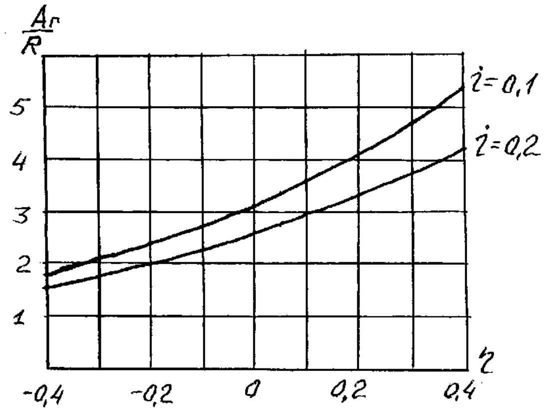

Рис. 2.8

На рис. 2.8 приведена зависимость современной стоимости геометрической ренты от темпа прироста платежей η при двух значениях процентной ставки дисконтирования i и $n = 4$.

Конечная наращенная стоимость геометрической ренты постнумерандо определяется суммой

$$S_{\Gamma} = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2}(1+\eta) + R(1+i)^{n-3}(1+\eta)^2 + \ldots +$$

$$+ R(1+i)(1+\eta)^{n-2} + R(1+\eta)^{n-1} = (1+i)^n \frac{R}{1+i} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1+\eta}{1+i}\right)^{k-1}.$$

Сравнивая данную формулу с (2.61), для конечной стоимости геометрической ренты получим

$$S_{\Gamma} = (1+i)^n A_{\Gamma} = R(1+i)^n \frac{1-\left(\frac{1+\eta}{1+i}\right)}{i-\eta} \quad при \;\; i \neq \eta. \qquad (2.64)$$

$$S_{\Gamma} = nR(1+i)^{n-1} \quad при \;\; i = \eta.$$

Для r-срочной геометрической ренты постнумерандо финансовый поток состоит из $n \cdot r$ платежей, образующих геометрическую прогрессию с первым членом R_r и знаменателем $q = (1+\eta)^{1/r}$. Современная стоимость такой ренты равна сумме дисконтированных платежей с коэффициентом дисконтирования $(1+i)^{1/r}$.

$$A_{\Gamma}^{(r)} = \frac{R_r}{r(1+i)^{1/r}} + \frac{R_r(1+\eta)^{1/r}}{r(1+i)^{2/r}} + \ldots + \frac{R_r(1+\eta)^{\frac{k-1}{r}}}{r(1+i)^{k/r}} + \ldots +$$

$$+ \frac{R_r(1+\eta)^{\frac{nr-1}{r}}}{(1+i)^{nr/r}} = \frac{R_r}{(1+i)^{1/r}} \sum_{k=1}^{nr} \left(\frac{1+\eta}{1+i}\right)^{\frac{k-1}{r}}. \qquad (2.65)$$

Данная сумма является суммой nr членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{R_r}{r(1+i)^{1/r}}$ и знаменателем $q = \left(\frac{1+\eta}{1+i}\right)^{\frac{k-1}{r}}$ и в соответствии с формулой (2.5) может быть записана в виде

$$A_{\Gamma}^{(r)} = R_r \frac{1-\left(\frac{1+\eta}{1+i}\right)^n}{(1+i)^{1/r} - (1+\eta)^{1/r}}. \qquad (2.66)$$

Конечная наращенная стоимость геометрической r-срочной ренты постнумерандо может быть получена умножением современной стоимости $A_{\Gamma}^{(r)}$ на множитель наращения $(1+i)^n$

$$S_{\Gamma}^{(r)} = R_r \frac{(1+i)^n - (1+\eta)^n}{(1+i)^{1/r} - (1+\eta)^{1/r}}. \tag{2.67}$$

Современная A_{Γ}^{*} и конечная S_{Γ}^{*} стоимости геометрической ренты пренумерандо могут быть получены умножением формул (2.62) и (2.64) на множитель $(1 + i)$.

2.9. Сравнение финансовых потоков и рент

При принятии финансовых решений часто возникает необходимость выбора между финансовыми потоками с различными параметрами. Для обоснованного принятия решений необходимо уметь сравнивать финансовые потоки и ренты. При сравнении финансовых потоков и рент какие-то их параметры должны быть одинаковыми, какие-то параметры должны быть сопоставимыми, а какие-то могут отличаться. Сравнение финансовых потоков и рент должно осуществляться по конечной наращенной или современной их стоимости, при этом рассматриваются финансовые потоки с равными сроками. На рис. 2.9 приведены зависимости современной A и наращенной конечной S стоимостей годовой ренты от годовой процентной ставки при сроке ренты 2 и 5 лет. Из рисунка видно, что с увеличением годовой процентной ставки современная стоимость ренты А уменьшается, а наращенная, конечная стоимость ренты увеличивается.

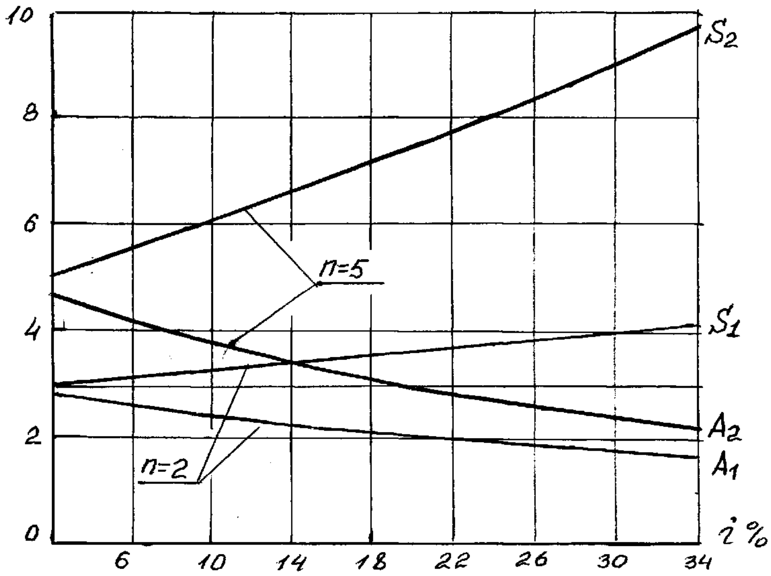

Рис. 2.9. Зависимость современной и наращенной стоимостей годовой ренты

Рассмотрим два потока

$$CF_1 = \{(P_0; t_0); (P_1, t_1); \ldots, (P_n, t_n)\}$$

$$CF_2 = \{(Q_0; t_0); (Q_1, t_1); \ldots, (Q_n, t_n)\},$$

отличающиеся лишь размерами платежей $P_m \neq Q_m$. Вполне очевидно, что при выполнении условия

$$P_m > Q_m \text{ при } m = 1 \div n \tag{2.68}$$

современная дисконтированная и конечная наращенная стоимость при любых значениях процентной ставки "i" будет больше для первого потока. Аналогично первый финансовый поток будет предпочтительным для любых значений процентной ставки дисконтирования при выполнении условия

$$\sum_{m=0}^{n} P_m > \sum_{m=0}^{n} Q_m. \tag{2.69}$$

Но при выполнении условий (2.68) и (2.69) первый и второй финансовые потоки не являются сопоставимыми (эквивалентными), а значит, их сравнение по стоимости является некорректным. Введем условие сопоставимости финансовых потоков в виде

$$\sum_{m=0}^{n} P_m = \sum_{m=0}^{n} Q_m, \tag{2.70}$$

т. е. сопоставимыми будем считать финансовые потоки, у которых сроки ренты и сумма всех платежей одинаковы. Сравним между собой годовую и r-срочную ренту. Для этих двух рент условие сопоставимости (2.70) выполняется, когда размер платежей r-срочной ренты в r раз меньше платежей годовой ренты $R_r = \frac{R}{r}$. Тогда для отношения современной (или наращенной) стоимости r-срочной ренты к современной (или наращенной) стоимости годовой ренты в соответствии с формулами (2.6), (2.8) и (2.21), (2.23) получим

$$\frac{A_{(r)}}{A} = \frac{S_{(r)}}{S} = \frac{i}{r[(1+i)^{1/r} - 1]}. \tag{2.71}$$

Из формулы (2.71) видно, что отношение $\frac{S^{(r)}}{S} = \frac{A^{(r)}}{A}$ не зависит от срока ренты "n".

На рис. 2.10 приведены графики зависимости отношений $\frac{S^{(r)}}{S} = \frac{A^{(r)}}{A}$ от количества платежей в году r при двух значениях годовой процентной ставки. Из них видно, что r-срочная рента является более предпочтительной по сравнению с годовой рентой.

Сравним между собой обычную годовую и арифметическую ренты. Вычислим размеры платежей арифметической ренты, при которых выполняется условие сопоставимости рент (2.70). При сроке рент, равном "n" лет, суммарные платежи для обычной годовой ренты будут равны nR.

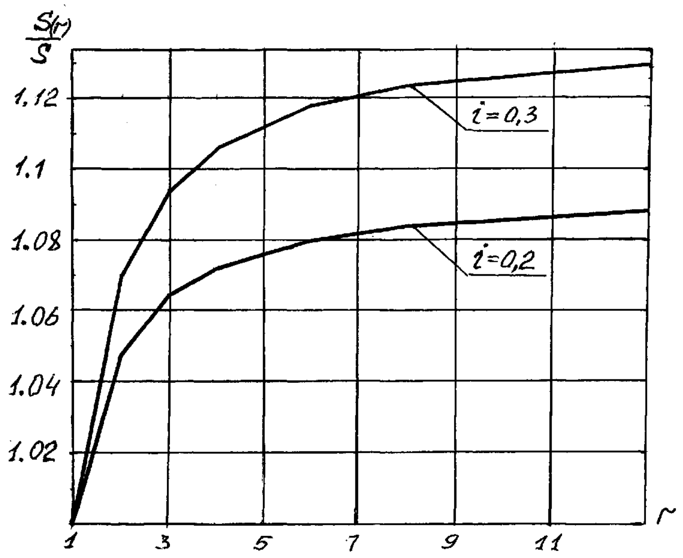

Рис. 2.10. Зависимость отношений $\frac{S^{(r)}}{S} = \frac{A^{(r)}}{A}$ от количества платежей в году

Для арифметической ренты суммарные платежи будут равны

$$\sum_{m=1}^{n} P_{am} = \sum_{m=1}^{n} [R_a + (m-1)Q_a] = nR_a + \frac{n(n-1)}{2} Q_a. \qquad (2.72)$$

Тогда условие сопоставимости обычной годовой и арифметической рент можно записать в виде

$$nR_a + \frac{n(n-1)}{2} Q = nR;$$
$$R_a = R - \frac{n-1}{2} Q_a. \qquad (2.73)$$

Подставив формулу (2.73) в (2.56) с учетом формул (2.7) и (2.8), для отношения наращенных стоимостей арифметической к годовой ренте получим

$$\frac{S_a}{S} = \frac{A_a}{A} = 1 + \eta_a \left[\frac{s_{n/i} - n}{i s_{n/i}} - \frac{n-1}{2} \right], \qquad (2.74)$$

где $\eta_A = \frac{Q_a}{R}$.

Графики зависимости отношения S_a/S от значений процентной ставки "i" при различных значениях срока ренты "n" и относительной разности η_a арифметической прогрессии приведены на рис. 2.11. Из приведенных графиков видно, что при убывающей арифметической прогрессии $\eta_a < 0$ предпочтительной является арифметическая рента. При возрастающей арифметической прогрессии платежей $\eta_a > 0$ предпочтительной оказывается обычная годовая рента, причем скорость возрастания при $\eta_a < 0$ (убывания при $\eta_a > 0$) отношения S_a/S

увеличивается при увеличении срока ренты "n" и относительной разности $|\eta_a|$ арифметической прогрессии платежей.

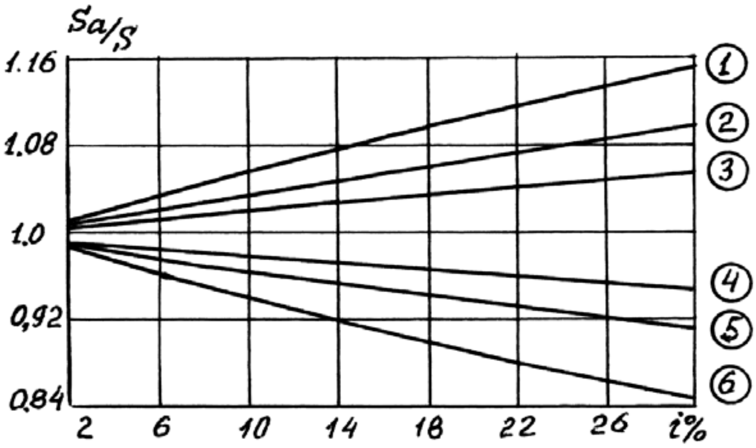

Рис. 2.11. Зависимость отношений $\frac{S\alpha}{S} = \frac{A\alpha}{A}$ от годовой процентной ставки

(**1** – n = 5, η_α = –0,3; **2** – n = 3, η_α = –0,5; **3** – n = 3, η_α = –0,3; **4** – n = 3, η_α = 0,3; **5** – n = 3, η_α = 0,5; **6** – n = 5, η_α = 0,3)

Приведем сравнение геометрической ренты с обычной годовой рентой. Вычислим размеры платежей геометрической ренты, при которых выполняется условие сопоставимости (2.70) сравниваемых рент

$$\sum_{m=1}^{n} P_{\Gamma m} = \sum_{m=1}^{n} P_{\Gamma}\,(1+\eta)^{m-1} = R_{\Gamma}\,\frac{(1+\eta)^n - 1}{\eta} = nR$$

$$R_{\Gamma} = R\,\frac{n\eta}{(1+\eta)^n - 1}. \qquad (2.75)$$

Подставив формулу (2.75) в (2.64) с учетом формул (2.7) и (2.8), для отношения конечных наращенных сумм геометрической и простой годовой рент получим

$$\frac{S_{\Gamma}}{S} = \frac{A_{\Gamma}}{A} = \frac{(1+i)^n - (1+\eta)^n}{i-\eta}\cdot\frac{n\,i\,\eta}{[(1+i)^n - 1][(1+\eta)^n - 1]}. \qquad (2.76)$$

При $i = \eta$ данная формула может быть преобразована к виду

$$\frac{S_{\Gamma}}{S} = \frac{A_{\Gamma}}{A} = \frac{n^2(1+i)^{n-1}}{s_{n/i}^2}; \quad при\ \ \eta = i. \qquad (2.77)$$

На рис. 2.12 приведены графики зависимости отношения $\frac{S_{\Gamma}}{S} = \frac{A_{\Gamma}}{A}$ от годовой процентной ставки "i" при различных значениях срока ренты "n" и величины "η", характеризующей темпы роста платежей. Из приведенных графиков видно, что при убывании размеров платежей $\eta < 0$ предпочтительной оказывается геометрическая рента по сравнению с годовой рентой. При $\eta > 0$ предпочтение следует отдать обычной годовой ренте. Скорость изменения отношения $\frac{S_г}{S}$ увеличивается при увеличении срока ренты "n" и темпов изменения размеров платежей "$|\eta|$".

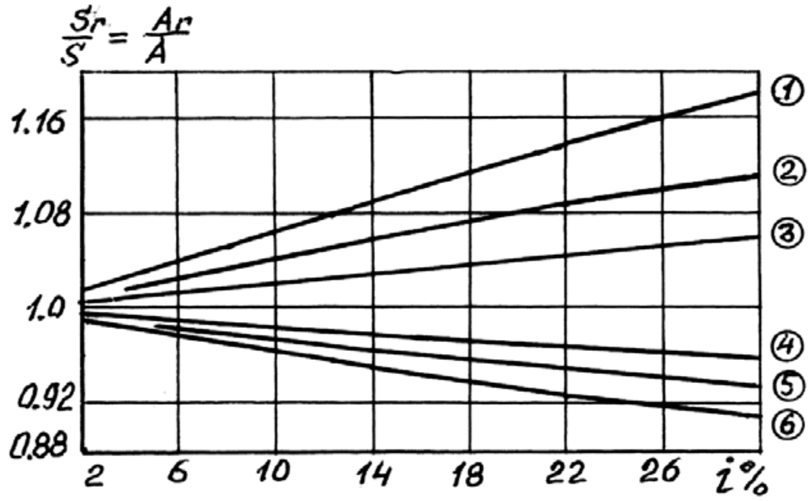

Рис. 2.12. Зависимость отношений $\frac{S_г}{S} = \frac{A_г}{A}$ от годовой процентной ставки

(**1** – n = 5, $\eta = -0{,}3$; **2** – n = 3, $\eta = -0{,}5$; **3** – n = 3, $\eta = -0{,}3$; **4** – n = 3, $\eta = 0{,}3$; **5** – n = 3, $\eta = 0{,}5$; **6** – n = 5, $\eta = 0{,}3$)

Оценим, насколько предпочтительной является рента с m-кратным начислением процентов по сравнению с обычной годовой рентой. Для этого вычислим отношения $\frac{S^{(m)}}{S}$ и $\frac{A^{(m)}}{A}$, используя формулы (2.46) и (2.48), а также формулы (2.6) и (2.8):

$$\frac{S^{(m)}}{S} = \frac{[(1+i_{эф})^n - 1]i}{i_{эф}[(1+i)^n - 1]}$$

$$\frac{A^{(m)}}{A} = \frac{[1-(1+i_{эф})^{-n}]i}{i_{эф}[1-(1+i)^n]}, \qquad (2.78)$$

где $i_{эф} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$ - эффективное значение годовой процентной ставки при m-кратном начислении процентов.

Результаты расчетов отношений $\frac{S^{(m)}}{S}$ и $\frac{A^{(m)}}{A}$ от кратности начисления процентов m по формулам (2.78) приведены на рис. 2.13 для двух значений годовой процентной ставки $i = \{0{,}12;\ 0{,}24\}$ и срока ренты $n = \{3;\ 5\}$.

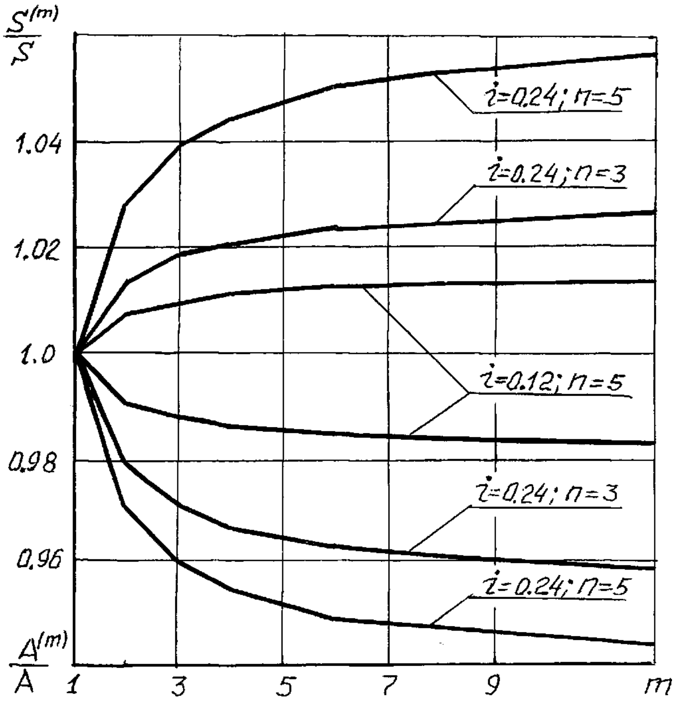

Рис. 2.13. Зависимости отношений $\frac{S^{(m)}}{S}$ и $\frac{A^{(m)}}{A}$ от кратности начисления процентов "*m*"

Из приведенных графиков видно, что при увеличении кратности начисления процентов увеличивается отношение $\frac{S^{(m)}}{S}$ и уменьшается отношение $\frac{A^{(m)}}{A}$. Из этого следует, что рента с m-кратным начислением процентов является более предпочтительной по сравнению с обычной годовой рентой. При увеличении годовой процентной ставки "i" и срока ренты "n" отношение $\frac{S^{(m)}}{S}$ увеличивается. Так например, при i = 0,24 и сроке ренты n = 5 лет конечная наращенная сумма $S^{(m)}$ ренты с ежемесячным начислением процентов m = 12 примерно на 5,6 % превышает конечную наращенную сумму обычной годовой ренты.

Проведем сравнение r-срочной ренты при m-кратном начислении процентов с обычной годовой рентой. Современная $A_r^{(m)}$ и финальная наращенная $S_r^{(m)}$ стоимости r-срочной ренты при m-кратном начислении процентов определяются формулами (2.50) при $r \neq m$ и формулами (2.51) при $r = m$. Для сравнения рент поделим значения стоимостей $S_r^{(m)}$ и $A_r^{(m)}$ r-срочной ренты при m-кратном начислении процентов на соответствующие значения стоимостей простой годовой ренты и получим

$$\frac{S_r^{(m)}}{S} = \frac{[(1+i_{эф})^n - 1]i}{r[(1+i_{эф})^{1/r} - 1][(1+i)^n - 1]}$$

$$\frac{A_r^{(m)}}{A} = \frac{[1-(1+i_{эф})^{-n}]i}{r[(1+i_{эф})^{1/r} - 1][1-(1+i)^{-n}]}, \tag{2.79}$$

где $i_{эф} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$ эффективное значение годовой процентной ставки при m-кратном начислении процентов.

Формулы (2.79) применяются для случая $r \neq m$. При $r = m$ формулы (2.79) упрощаются и могут быть записаны в виде

$$\frac{S_{(r=m)}}{S} = \frac{(1+i_{эф})^n - 1}{(1+i)^n - 1}$$

$$\frac{A_{(r=m)}}{A} = \frac{1-(1+i_{эф})^{-n}}{1-(1+i)^{-n}}. \tag{2.80}$$

Графики зависимости отношений $\frac{S_r^{(m)}}{S}$ и $\frac{A_r^{(m)}}{A}$ от кратности начисления процентов "m" приведены на рис. 2.14.

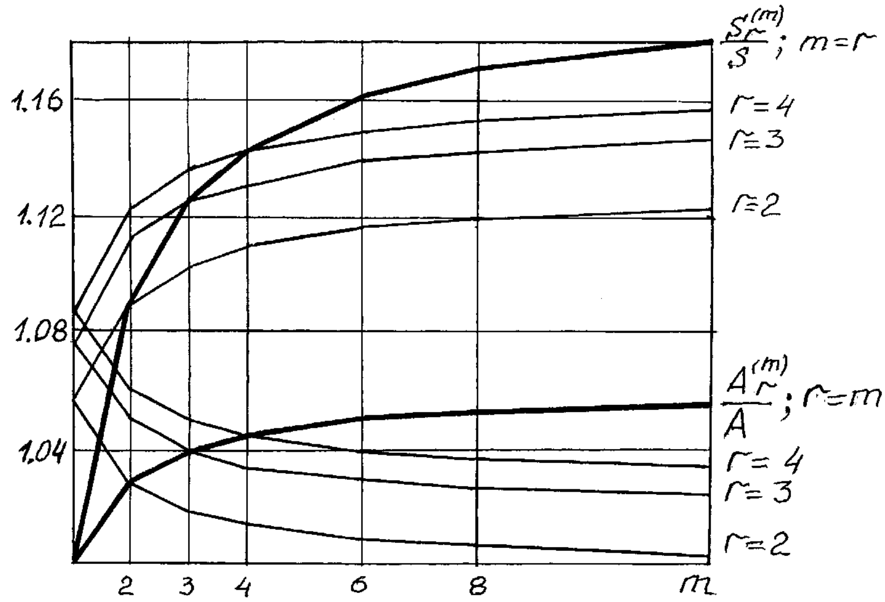

Рис. 2.14. Зависимости отношений $\frac{S_r^{(m)}}{S}$ и $\frac{A_r^{(m)}}{A}$ от кратности начисления процентов "m"

Расчет проводился для годовой процентной ставки i = 0,24 и срока ренты n = 5 лет.

При равенстве значений $r = m$ отношения $\frac{S_{(r=m)}}{S}$ и $\frac{A_{(r=m)}}{A}$ увеличиваются с ростом кратности начисления процентов "m". При $r \neq m$ отношение $\frac{S_r^{(m)}}{S}$ увеличивается, а отношение $\frac{A_r^{(m)}}{A}$ уменьшается с ростом кратности начисления процентов.

При $r > m$ справедливы неравенства $S_r^{(m)} > S_{(r=m)}$ и $A_r^{(m)} > A_{(r=m)}$, а при $r < m$ наоборот $S_r^{(m)} < S_{(r=m)}$ и $A_r^{(m)} < A_{(r=m)}$. из приведенных расчетов следует, что наиболее предпочтительная является r-срочная рента с m-кратным начислением процентов при $m = r$. Так например, при годовой процентной ставке i = 0,24 и сроке ренты n = 5 лет, рента с ежемесячными платежами r = 12 и ежемесячным начислением процентов m = 12 дает выигрыш по конечной наращенной сумме примерно на 18 % по сравнению с обычной годовой рентой.

2.10. Конверсия рент

При меняющихся экономической ситуации, финансовом состоянии субъектов экономической деятельности, особенно в условиях кризиса, часто возникает необходимость изменения условий выплаты ренты, т. е. замены одной ренты на другую или разового платежа, либо, наоборот, разовый платеж заменить рентой (рассрочка платежа), а также заменить несколько рент одной. Все вышеперечисленные операции называют конверсией рент. При конверсии рент должно выполняться одно общее правило – в момент заключения сделки о конверсии рент t_k современные стоимости старых рент, приведенных к моменту времени t_k, и современные стоимости новых рент должны быть равны. Это правило следует из естественного требования, чтобы конверсия рент не меняла финансового положения сторон сделки, т. е. на момент заключения сделки о конверсии рент должен соблюдаться принцип их финансовой эквивалентности.

Данный принцип определяет следующий алгоритм расчета параметров новой ренты.

1. Определяется современная стоимость старой (старых) ренты, приведенная к моменту заключения сделки t_k о конверсии рент.

2. В случае объединения нескольких рент современные их стоимости, приведенные к моменту времени t_k, складываются и дают современную стоимость новой ренты.

3. Зная современную стоимость новой ренты, рассчитывают параметры новой ренты.

Рассмотрим такие примеры конверсии рент как рассрочка платежа; выкуп ренты; замена одной ренты новой рентой; замена нескольких рент с разными параметрами одной новой рентой.

1) ***Рассрочка платежа.*** Предположим, что некоторый субъект экономической деятельности (должник) имеет задолженность в сумме P_D рублей перед кредитором, которая должна быть погашена в установленное время t_0. При невозможности погасить задолженность в установленное время за счет собственных средств должник может обратиться в банк с просьбой о предоставлении ему кредита в сумме P_D или договориться с кредитором о погашении задолженности не единовременным платежом, а рентными платежами. При этом все условия предоставления и погашения банковского кредита или рентных платежей кредитору определяются из условия равенства долга современной стоимости ренты.

$$P_D = A = \frac{R}{r}\frac{1-(1+i)^{-n}}{[(1+i)^{1/r}-1]}.$$

При погашении задолженности за счет банковского кредита все параметры ренты по погашению кредита определяются методикой банка. При согласии кредитора заменить единовременное погашение задолженности рентными платежами все параметры ренты (R, r, i, n) определяются договоренностью должника и кредитора.

2) ***Выкуп ренты***. Выкупом ренты называется замена ренты единовременным платежом. Данную операцию рассмотрим на примере погашения кредита аннуитетом. Предположим, что кредит на сумму "D" руб. выдан на "n" лет под "i" процентов годовых, и его погашение осуществляется постоянными ежеквартальными платежами. График платежей в погашение кредита представляет собой r-срочную ренту постнумерандо (r = 4) с количеством платежей, равным "$r \cdot n$". Размер аннуитета для данной ренты определяется формулой (2.33):

$$R_r = \frac{D[(1+i)^{1/r}-1]}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Ссудозаемщик регулярно осуществлял выплаты по кредиту в течение "k" платежей (рис. 2.15).

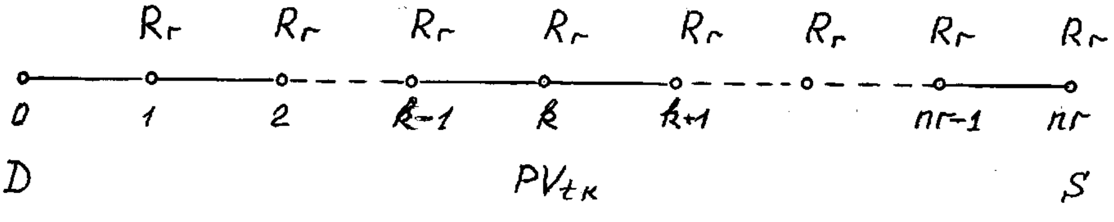

Рис. 2.15. Финансовый поток выплат по кредиту

При наступлении k-го платежа вместе с очередным платежом у ссудозаемщика появилась возможность досрочного погашения всей оставшейся задолженности по кредиту. Приведенную стоимость данной ренты PV_{tk} к моменту k-го платежа по аналогии с формулой (2.1) можно записать в виде

$$PV_{tk}=R_r(1+i)^{\frac{k-1}{r}}+R_r(1+i)^{\frac{k-2}{r}}+\ldots+R_r+ \\ +\frac{R_r}{(1+i)^{1/r}}+\frac{R_r}{(1+i)^{2/r}}+\ldots+\frac{R_r}{(1+i)^{\frac{nr-k}{r}}}. \qquad (2.81)$$

Первые k слагаемых в формуле (2.81) определяют конечную стоимость выплаченной части ренты

$$S_k=R_r+R(1+i)^{1/r}+\ldots+R_r(1+i)^{\frac{k-2}{r}}+R_r(1+i)^{\frac{k-1}{r}}=R_r\frac{[(1+i)^{k/r}-1]}{[(1+i)^{1/r}-1]}. \qquad (2.82)$$

Остальные $nr-k$ слагаемых в формуле (2.81) определяют стоимость невыплаченной части ренты, приведенной к моменту времени k-го платежа

$$A_{tk}=\frac{R_r}{(1+i)^{1/r}}+\frac{R_r}{(1+i)^{2/r}}+\ldots+\frac{R_r}{(1+i)^{\frac{nr-k-1}{r}}}+\frac{R_r}{(1+i)^{\frac{nr-k}{r}}}=R_r\frac{[1-(1+i)^{\frac{-nr+k}{r}}]}{[(1+i)^{1/r}-1]}.$$

Эта стоимость определяет оставшуюся невыплаченную при k-м платеже сумму кредита D_k.

Для полного погашения кредита вместе с k-м платежом должна быть внесена сумма

$$D_k=A_{tk}=R_r\frac{[1-(1+i)^{\frac{-nr+k}{r}}]}{[(1+i)^{1/r}-1]}. \qquad (2.83)$$

Рассчитываем сумму, необходимую для досрочного погашения кредита при $k = 2$ втором платеже для примера, рассматриваемого в п. 2.4. В этом примере рассматриваются следующие исходные данные: $D = 100$ тыс. руб., $n = 1$ год, $r = 4$, $i = 20$ %. Размер разового квартального платежа составляет $R_r = 27981{,}09$ руб.

В соответствии с формулой (2.83) необходимая сумма для полного погашения кредита $D_{k=2}$

$$D_{k=2}=27981{,}09\frac{[1-(1+0{,}2)^{1/2}]}{[(1+2)^{1/4}-1]}=27981{,}09\frac{\left[1-\frac{1}{1{,}09544512}\right]}{[1{,}04663515-1]}=52277{,}44 \text{ руб.}$$

Данная сумма совпадает с текущей оставшейся задолженностью по кредиту, приведенной в табл. 2.1 п. 2.4 при втором ($k = 2$) платеже.

3) ***Замена двух рент одной новой рентой***. Рассмотрим две ренты, график платежей по которым приведен на рис. 2.16.

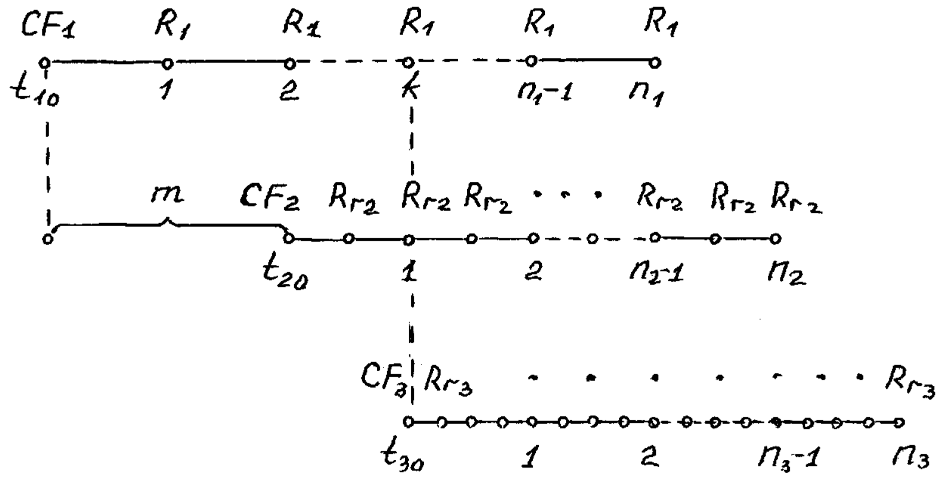

Рис. 2.16. Финансовые потоки при замене двух рент одной новой рентой

Первая рента является годовой рентой с ежегодными платежами R_1, годовой процентной ставкой i_1 и сроком ренты n_1 лет. Вторая рента является r-срочной рентой с платежами размером $R_{2r} = \frac{R_2}{r_2}$, годовой процентной ставкой i_2 и сроком ренты n_2 лет ($n_2 r_2$ платежей).

Дата начала второй ренты t_{20} от даты начала первой ренты t_{10} сдвинута на "m" лет, т. е. $\frac{t_{20} - t_{10}}{365} = m.$ Плательщик рент принял решение с даты t_k объединить оставшиеся выплаты по первой и второй рентам и заменить их третьей рентой. Будем считать, что дата конверсии рент t_k удовлетворяет условию $\frac{t_k - t_{10}}{T} = k,$ т. е. по первой ренте до даты t_k совершено k платежей и осталось совершить $n_1 - k$ платежей. Приведенную стоимость первой ренты к дате t_k по аналогии с формулой (2.1) можно записать в виде

$$PV_{1tk} = R_1(1+i_1)^{k-1} + R_1(1+i_1)^{k-2} + \ldots + R_1 +$$
$$+ \frac{R_1}{(1+i_1)} + \frac{R_1}{(1+i_1)^2} + \ldots + \frac{R_1}{(1+i_1)^{n_1-k}}.$$

Приведенная к дате t_k стоимость невыплаченной части первой ренты является суммой (n_1 – k) членов убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{R_1}{(1+i_1)}$, знаменателем $\frac{1}{(1+i)}$ и определится формулой

$$A_{1tk} = R_1 \frac{[1-(1+i_1)^{-n_1+k}}{i_1}.$$

Из рис. 2.16 видно, что по второй ренте до даты t_k совершено $(k-m)r_2$ платежей. Приведенную стоимость второй ренты к дате t_k по аналогии с формулой (2.81) можно записать в виде

$$PV_{2tk} = R_{r_2}(1+i_2)^{(k-m)} + R_{r_2}(1+i_2)^{(k-m-1/r_2)} + \ldots + R_{r_2} +$$

$$+\frac{R_{r_2}}{(1+i_2)^{1/r_2}} + \frac{R_{r_2}}{(1+i_2)^{2/r_2}} + \ldots + \frac{R_{r_2}}{(1+i_2)^{(n_2+m-k)}}.$$

Из данной формулы видно, что приведенная к дате t_k стоимость невыплаченной части второй ренты является суммой $(n_2+m-k)r$ членов убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{R_{r_2}}{(1+i_2)^{1/r_2}}$, знаменателем $q = \frac{1}{(1+i_2)^{1/r_2}}$ и определится формулой

$$A_{2tk} = R_{r_2}\frac{[1-(1+i_2)^{-n_2-m+k}]}{[(1+i_2)^{1/r_2}-1]}.$$

При замене нескольких рент одной новой рентой должно обеспечиваться равенство суммы приведенных к дате t_k стоимостей старых рент современной стоимости новой ренты:

$$A = \sum_j A_{jtk} = A_{1tk} + A_{2(tk)}.$$

Параметры новой ренты определяются из условия:

$$A = R_{r_3} \times \frac{[1-(1+i_3)^{-n_3}]}{[(1+i_3)^{1/r_3}-1]} = R_1\frac{[1-(1+i_1)^{-n_1+k}]}{i_1} + R_{r_2}\frac{[1-(1+i_2)^{-n_2-m+k}]}{[(1+i_2)^{1/r_2}-1]}, \quad (2.84)$$

где $R_{r_3} = \frac{R_3}{r_3}$; r_3, i_3, и n_3 – параметры новой ренты. Срок новой ренты n_3 отсчитывается от даты t_k в годах. При расчете параметров новой ренты все параметры, кроме одного, должны быть определены по договоренности сторон, заключающих сделку о конверсии рент, а неизвестный параметр, например, R_{r_3}, определяется из уравнения (2.84).

Контрольные вопросы и задания

1. Привести формулу для определения современной приведенной стоимости *PV* и финальной наращенной стоимости *FV* финансового потока сроком на t дней, при годовой процентной ставке *i* %.
2. Пояснить отличие рент постнумерандо и пренумерандо.
3. Определить современную (начальную) стоимость годовой ренты постнумерандо с размером платежей *R* = 40 тыс. руб. при годовой процентной ставке *i* = 10 % и сроке ренты *n* = 3 года.
4. Определить финальную (наращенную) стоимость годовой ренты пренумерандо с размером платежей 20 тыс. руб. при годовой процентной ставке *i* = 11 % и сроке ренты *n* = 4 года.

5. Финальная (наращенная) стоимость ренты постнумерандо при годовой процентной ставке i = 10 % годовых и сроке ренты 4 года составила 146410 руб. Определить начальную приведенную стоимость этой ренты.

6. Начальная стоимость годовой ренты пренумерандо при годовой процентной ставке i = 12 % и сроке ренты n = 3 года составляет 500000 руб. Определить финальную (наращенную) стоимость этой ренты.

7. Записать формулы, устанавливающие взаимосвязь между финальными и начальными стоимостями рент постнумерандо и пренумерандо.

8. Определить начальную и финальную стоимости r-срочной ренты постнумерандо при r = 4, годовой процентной ставке i = 12 %, размере годового платежа 80000 руб. и сроке ренты n = 2 года.

9. Финальная стоимость r-срочной ренты постнумерандо при r = 4 и и i = 12,56 % составила 100000 руб. Определить финальную стоимость r-срочной ренты пренумерандо.

10. Современная (начальная) стоимость ренты пренумерандо при r = 2 и и i = 10,7 % составляет 210000 руб. Определить современную (начальную) стоимость ренты постнумерандо.

11. Найти средний срок финансового потока:

$$CF = \{(0;100);(1;200);(2;300);(3;400)\}.$$

12. Начальная стоимость r-срочной ренты постнумерандо A_r, заключенной на 2 года при годовой процентной ставке i = 9 %, при ежеквартальных платежах r = 4, равна 400 тыс. руб. Определить размер ежеквартальных платежей R/r.

13. В коммерческом банке взят потребительский кредит на сумму 300 тыс. руб. сроком на 1 год под 19 % годовых. Погашение кредита осуществляется ежеквартальными платежами r = 4. Рассчитать график платежей в погашение кредита.

14. В банке взят валютный кредит в сумме $D_€$ = 8000 евро сроком на один год под $j_€$ = 6 % с ежеквартальными платежами. Кредит гасится из рублевых доходов ссудозаемщика. Определить суммарные рублевые выплаты по кредиту, если на момент заключения кредитного договора обменный курс валюты был равен $K_{€Ro}$ = 80 и далее за каждый последующий квартал уменьшался на 2,5 рубля за 1 евро.

15. Организацией для осуществления внешнеэкономической деятельности взят рублевый кредит в сумме 1200 тыс. руб., что на момент заключения кредита соответствовало 20000 $ США ($K_{\$Ro}$ = 60). Кредит взят сроком на 1 год с ежеквартальными платежами под годовую процентную ставку i = 20 %. Погашение рублевого кредита осуществляется из валютных доходов организации. Определить размеры ежеквартальных рублевых платежей по кредиту, их валютные эквиваленты и суммарные валютные расходы по погашению рублевого кредита, если обменный курс

валюты увеличивался за каждый последующий квартал на 1,5 рубля за 1 доллар США.

16. Определить первоначальную стоимость r-срочной ренты (r = 2), заключенной на 2 года при m-кратном начислении процентов m = 4 с размером годового платежа R = 80000 руб.

17. Определить начальную A_a и финальную стоимость S_a арифметической ренты постнумерандо, заключенной на 3 года с размером годового платежа $R = R_o + (k – 1)Q$, где R_o = 50 тыс. руб., Q = 10 тыс. руб., k – номер платежа. При расчетах годовую процентную ставку принять равной i = 11 %.

18. Определить финальную стоимость r-срочной геометрической ренты постнумерандо (r = 4), заключенной на n = 3 года с размером разовых ежеквартальных платежей $R_k = R_r(1+\eta)^{\frac{k-1}{r}}$, где $R_r = 20000$ руб., η = 5 %; k = 1÷(nr - 1) – номер платежа. При расчетах годовую процентную ставку принять равной i = 10 %.

19. Кредит, заключенный на n = 2 года с годовой процентной ставкой i = 18 %, погашается ежеквартальными платежами размером R = 74954,4 руб. При осуществлении пятого (k = 5) платежа ссудозаемщик планирует досрочно погасить всю оставшуюся задолженность по кредиту. Определить сумму денежных средств, которые ссудозаемщик должен внести для досрочного погашения оставшейся задолженности по кредиту.

20. Ссудозаемщик производит рентные платежи в погашение двух кредитов. Первый кредит заключен под годовую процентную ставку i_1 = 16 % на 5 лет, погашается ежегодными платежами (r_1 = 1) в размере R_1 = 157704,4 руб. Второй кредит заключен под годовую процентную ставку i_2 = 18 % на 2 года, погашается ежегодными платежами (r_2 = 4) в размере R_2 = 44972,64 руб.

При оплате третьего платежа по первому кредиту ссудозаемщик планирует заменить эти две ренты одной новой рентой с годовой процентной ставкой i_3 = 17 % с ежеквартальными платежами сроком на n_3 = 4. Определить размер платежей по новой ренте R_3, если на момент замены рент по второму кредиту осталось совершить шесть платежей.

3. Финансовые операции в условиях неопределенности

3.1. Доходность финансовой операции в условиях неопределенности

Доходность финансовой операции (см. формулу (1.1) зависит от множества факторов, которые можно объединить в следующие группы:

- политические и социальные;
- финансово-экономические;
- организационно-технические;
- отраслевые;
- природные факторы.

Политические и социальные факторы обусловлены политической и, как следствие, экономической и социальной нестабильностью внутри страны и в международных отношениях. Политическая нестабильность внутри страны связана с борьбой за власть различных партий, которые в борьбе за избирателей отстаивают различные модели социально-экономического развития. Во многих случаях это связано с лоббированием партийными фракциями интересов различных фирм и компаний. Возможность смены политического расклада в коридорах власти приводит к нестабильности налогового и хозяйственного законодательства. Возможная смена "правил игры" для хозяйствующих субъектов приводит к невозможности заранее однозначно прогнозировать результаты финансово-хозяйственной деятельности.

Нестабильность в международных отношениях обусловлена процессами глобализации экономики, отстаиванием странами своих геополитических интересов и обеспечением экономической безопасности. Это может приводить к введению политических и экономических санкций.

К социальным факторам относятся забастовки и криминогенная обстановка в стране и в отдельных ее регионах.

Финансово-экономические факторы. К этим факторам относят изменения ключевой ставки и ставки рефинансирования Центрального банка России; колебания курса валют; колебания годовых процентных ставок коммерческих банков по депозитам и кредитным операциям; колебания цен на энергоносители на мировом рынке, а также цен и тарифов на товары и услуги на внутреннем рынке; инфляционные процессы; распространение неплатежей и т. п.

Финансово-экономические факторы являются, как правило, следствием политической и социально-экономической ситуации как внутри страны, так и в международных отношениях.

Организационно-технические факторы. К этой группе факторов можно отнести: квалификацию управленческого персонала; недостаточное знание юридической базы совершения сделок и проведения схем финансово-хозяйственных операций; непроизводственные простои производственного оборудования; несоблюдение технологических нормативов эксплуатации оборудования, хранения сырья; возможность срыва сроков поставок оборудования, комплектующих и материально-производственных запасов.

Природные факторы. К этой группе факторов относятся землетрясения, наводнения, ураганы, смерчи, засухи, заморозки и другие природные и погодные катаклизмы.

Отраслевые факторы. Это факторы, присущие тем или иным отраслям хозяйственной деятельности. Так, для сельскохозяйственной отрасли существенными являются природные факторы; для рыбопромышленного комплекса существенным фактором является состояние эксплуатируемых биоресурсов, возможность ведения промысла в экономических зонах других государств, политика нашего государства в плане воспроизводства рыбопромысловых судов и т. п.

Совокупное действие всех этих факторов приводит к тому, что величина дохода ΔS_t (формула (2.1), получаемого после совершения финансово-хозяйственной операции, даже на ограниченном временном интервале t является случайной величиной. При реинвестировании получаемых доходов S_t на нескольких финансово-хозяйственных циклах суммарный доход определится формулой:

$$S(T_{инв}) = S_0 \prod_{i=1}^{n} (1 + \mu_{t_i}), \tag{3.1}$$

где μ_{t_i} - доходность финансовой операции на интервале длительностью t_i цикла совершения финансово-хозяйственной операции.

При длительном инвестировании средств $T_{инв} = \sum_{i=1}^{n} t_i$ условия хозяйствования и факторы, влияющие на финансовый результат, могут значительно изменяться на интервале инвестирования средств $T_{инв}$. При этом суммарная доходность определяется формулой:

$$\mu_{\Sigma} = \prod_{i=1}^{n} (1 + \mu_{t_i}) - 1 \tag{3.2}$$

и может изменяться под воздействием случайных факторов в значительных пределах.

Так как доходность финансовой операции (формула 1.1) определяется совокупным действием множества случайных факторов, доходность финансовой операции μ_t и получаемый доход ΔS_t в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей можно считать случайными величинами, имеющими нормальный закон распределения.

Плотность вероятности случайных величин μ и ΔS может быть записана в виде:

$$W(\Delta S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left[-\frac{(\Delta S - m_s)^2}{2\sigma_s^2} \right]$$
$$W(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu} \exp\left[-\frac{(\mu - m_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2} \right], \tag{3.3}$$

где m_s и m_μ - математическое ожидание (ожидаемое среднее значение) дохода ΔS и доходности μ соответственно;

σ_s и σ_μ - среднеквадратическое отклонение соответственно дохода ΔS и доходности μ от математического ожидания.

Чем больше среднеквадратическое отклонение σ_s (или σ_μ), тем на большую величину фактически полученный доход (или доходность) может отличаться от ожидаемого среднего значения.

Оценим суммарную доходность μ_Σ финансовых операций на двух (n = 2) соседних интервалах инвестирования t_1 и t_2:

$$\mu_\Sigma = (1+\mu_1)(1+\mu_2) - 1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_1\mu_2. \tag{3.4}$$

Из формулы (3.4) видно, что суммарная доходность μ_Σ определяется не только суммой доходностей на соседних интервалах μ_1 и μ_2, но и слагаемым $\mu_1\mu_2$, обусловленным так называемым синергетическим эффектом.

Если μ_1 и μ_2 являются случайными величинами, то их совместная плотность вероятности определяется формулой:

$$W(\mu_1;\mu_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \left[\frac{(\mu_1 - m_1)^2}{\sigma_{\mu_1}^2} + \frac{(\mu_2 - m_2)^2}{\sigma_{\mu_2}^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2\rho(\mu_1 - m_1)(\mu_2 - m_2)}{\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}} \right]\right\}, \tag{3.5}$$

где ρ - коэффициент корреляции случайных величин μ_1 и μ_2, характеризующий степень линейной взаимосвязи между значениями доходностей μ_1 и μ_2 на соседних интервалах инвестирования t_1 и t_2.

Коэффициент корреляции может принимать значения в интервале $-1 \le \rho \le 1$.

Формулы (3.4) и (3.5) позволяют определить математическое ожидание суммарной доходности m_Σ и дисперсию $D_\Sigma = \sigma_{\mu_\Sigma}^2$. Для математического ожидания суммарной доходности получим:

$$m_{\Sigma} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_1 \cdot \mu_2) W(\mu_1;\mu_2) d\mu_1 d\mu_2 = m_1 + m_2 + m_1 m_2 + \sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho. \quad (3.6)$$

Если случайные величины μ_1 и μ_2 независимы, то $\rho = 0$ и четвертое слагаемое в формуле (3.6) будет равно нулю. Но на практике доходности финансовых операций μ_1 и μ_2 на соседних временных интервалах инвестирования t_1 и t_2, как правило, зависимы, причем, если при увеличении доходности μ_1 наблюдается тенденция к увеличению доходности μ_2, то $\rho > 0$; если при увеличении доходности μ_1 наблюдается тенденция к уменьшению доходности μ_2, то $\rho < 0$.

В реальной рыночной экономике ожидаемый средний уровень доходности имеет значение $m_{\mu} = (0{,}1 \div 0{,}2)$. Из этого следует, что третье слагаемое в формуле (3.6) на порядок меньше чем сумма первых двух слагаемых, т. е. увеличение суммарной доходности m_{Σ} за счет синергетического эффекта имеет незначительную величину. На основании данного вывода третьим слагаемым в формуле (3.4) можно пренебречь. В этом случае суммарную доходность m_{Σ} при $\rho \approx 0$ можно определять суммой доходностей инвестиций на интервалах t_i:

$$\mu_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i. \quad (3.7)$$

Если доходности μ_i являются независимыми случайными величинами, имеющими нормальный закон распределения с числовыми характеристиками m_i и $D\mu_i = \sigma^2_{\mu_i}$, то с учетом равенства (3.7) можно считать, что суммарная доходность будет иметь нормальный закон распределения плотности вероятности (формула (3.3) с математическим ожиданием и дисперсией, определяющимися формулами:

$$m_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} m_i; \;\; D_{\mu_{\Sigma}} = \sum_{i=1}^{n} D_{\mu_i}; \;\; \sigma_{\mu_{\Sigma}} = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} D_{\mu_i}}. \quad (3.8)$$

3.2. Риск финансовой операции и его количественная оценка

При анализе финансовых операций термин "риск финансовой операции" понимается неоднозначно. На уровне интуитивного восприятия финансовый риск понимается как возможные финансовые потери, связанные с неопределенностью развития финансовой операции на интервале ее совершения. Как было показано в п. 3.1, доход и доходность финансовой операции в условиях неопределенности являются случайными величинами, закон распределения которых может быть принят нормальным (формула (3.3). Результат совершения финансовой операции (ее эффективность) может быть оценен средней ожидаемой доходностью

m_μ (математическим ожиданием доходности). В условиях неопределенности величина полученной доходности μ_t может быть как больше, так и меньше ожидаемой.

При таком интуитивном понимании риском финансовой операции считается ситуация, когда реально полученная доходность меньше ожидаемой $\mu_t < m_\mu$. Но при таком понимании риска в любом случае вероятность наступления события $\mu_t < m_\mu$ при нормальном законе распределения доходности будет одной и той же, равной 0,5:

$$P(\mu_t < m_\mu) = \int_{-\infty}^{m_\mu} w(\mu) d_\mu = 0{,}5.$$

Это не позволяет использовать такой подход в определении риска для оценки вероятности возможности его наступления.

Другим подходом в интуитивном понимании риска является ситуация, когда в результате финансовой операции инвестор получает убытки ($\Delta S < 0$), т. е. доходность финансовой операции будет отрицательной $\mu_t < 0$.

Вероятность наступления такого события определяется формулой:

$$P(\mu_t < 0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\mu - m_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2}\right] d\mu = 1 - \Phi\left(\frac{m_\mu}{\sigma_\mu}\right), \qquad (3.9)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - интеграл вероятности, специальная табулированная функция (Прилож. В).

Из формулы (3.9) видно, что вероятность получения убытков в результате финансовой операции полностью определяется математическим ожиданием доходности m_μ и среднеквадратическим отклонением доходности σ_μ. Поэтому для количественной оценки рисков часто используют отношение среднеквадратического отклонения доходности к его математическому ожиданию, называемое коэффициентом вариации доходности $k_в = \frac{\sigma_\mu}{m_\mu}$. Чем больше коэффициент вариации, тем больше риски данной финансовой операции.

Еще одним существенным фактором в оценке рисков является инвестор как лицо, принимающее решение о целесообразности совершения той или иной финансовой операции в условиях неопределенности. Инвестор или ответственный финансовый менеджер организации принимают решение о совершении той или иной финансовой операции в зависимости от финансовой ситуации, в которой находится организация в данный момент, и от склонности финансового менеджмента организации к совершению рискованных финансовых операций. В этом случае при принятии решений необходимо учитывать не только степень риска, но и так называемую функцию полезности принимаемого в условиях неопределенности решения. Рассмотрим данную ситуацию на примере.

Пример 3.1. Организация на данный момент времени t_0 располагает некоторой суммой свободных средств S_0. Через время $\Delta t = t - t_0$ она должна погасить задолженность $D_t > S_0$. Для получения дохода на интервале Δt $S_t = S_0(1+\mu_t) \geq D_t$ временно свободные средства S_0 могут быть вложены (инвестированы) в одну из двух финансовых операций с показателями средней доходности m_{μ_1} и m_{μ_2} и среднеквадратического отклонения доходностей σ_{μ_1} и σ_{μ_2}.

Для погашения задолженности D_t доходность финансовой операции при инвестировании средств S_0 должна удовлетворять неравенству:

$$\mu_{mp} \geq \frac{D_t}{S_0} - 1. \tag{3.10}$$

В данной ситуации степень полезности первой или второй финансовой операции может быть оценена вероятностью погашения задолженности D_t, определяемой по формуле:

$$P(\mu_1 > \mu_{mp}) = \int\limits_{\mu_{mp}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mu_1}} \exp\left[-\frac{(\mu_1 - m_{\mu_1})^2}{2\sigma_{\mu_1}^2}\right] d_{\mu_1} = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_{mp} - m_{\mu_1}}{\sigma_{\mu_1}}\right) \tag{3.11}$$

$$P(\mu_2 > \mu_{mp}) = \int\limits_{\mu_{mp}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mu_2}} \exp\left[-\frac{(\mu_2 - m_{\mu_2})^2}{2\sigma_{\mu_2}^2}\right] d_{\mu_2} = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_{mp} - m_{\mu_2}}{\sigma_{\mu_2}}\right).$$

Из приведенных рассуждений следует, что для количественной оценки риска необходимо знать вероятности различных исходов финансовой операции. В самом общем случае это определяется законом распределения случайной доходности финансовой операции, заданным в виде плотности вероятности $W(\mu)$ или функции распределения доходности:

$$F(\mu_T) = \int\limits_{-\infty}^{\mu_T} W(\mu)d\mu = P(\mu \leq \mu_T).$$

Знание закона распределения позволяет определить вероятность убытков

$$P(\mu < 0) = \int\limits_{-\infty}^{0} W(\mu)d\mu = F(\mu_T = 0) = 1 - \Phi\left(\frac{m_\mu}{\sigma_\mu}\right) \tag{3.12}$$

и средний размер возможных убытков по формуле

$$\bar{S}_{уб} = S_0 \frac{\int_{-\infty}^{0} \mu W(\mu) d\mu}{\int_{-\infty}^{0} W(\mu) d\mu} = \frac{\int_{-\infty}^{0} \mu W(\mu) d\mu}{P(\mu < 0)}.$$

Аналогично коэффициенту вариации доходности количественная оценка риска финансовой операции может осуществляться по отношению средних ожидаемых убытков к среднему ожидаемому доходу:

$$\frac{\bar{S}_{уб}}{S_0 m_\mu} = \frac{\int_{-\infty}^{0} \mu W(\mu) d\mu}{\int_{-\infty}^{0} W(\mu) d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \mu W(\mu) d\mu} = \frac{\int_{-\infty}^{0} \mu W(\mu) d\mu}{m_\mu P(\mu < 0)}. \qquad (3.13)$$

Для получения количественных результатов предположим, что средние значения доходностей по рассматриваемым финансовым операциям соответственно равны $m_{\mu_1} = 0{,}2$, $m_{\mu_2} = 0{,}18$. Среднеквадратические отклонения доходностей имеют значения $\sigma_{\mu_1} = 0{,}08$, $\sigma_{\mu_2} = 0{,}04$. Для погашения задолженности требуемая доходность (формула (3.10) должна быть равна $m_{тр} = 0{,}26$.

Если оценивать риски рассматриваемых финансовых операций без учета обязательного погашения задолженности, то для коэффициентов вариации получим:

$$k_{B_1} = \frac{\sigma_{\mu_1}}{m_{\mu_1}} = \frac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}4$$

$$k_{B_2} = \frac{\sigma_{\mu_2}}{m_{\mu_2}} = \frac{0{,}4}{0{,}18} = 2{,}22.$$

Для вероятностей убытков в соответствии с формулой (3.12) получим:

$$P_1(\mu_1 < 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0{,}2}{0{,}08}\right) = 1 - \Phi(2{,}5) = 0{,}0062$$

$$P_2(\mu_2 < 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0{,}18}{0{,}4}\right) = 1 - \Phi(0{,}45) = 0{,}3264.$$

Из полученных значений k_B и $P(\mu < 0)$ видно, что первая финансовая операция является менее рискованной, так как:

$$k_{B_1} < k_{B_2}; \quad P_1(\mu_1 < 0) < P_2(\mu_2 < 0).$$

С учетом погашения задолженности D_t для вероятностей $P(\mu > \mu_{тр})$ получим формулы (3.11).

$$P(\mu_1 > \mu_{mp}) = 1 - \Phi\left(\frac{0,26 - 0,2}{0,08}\right) = 1 - \Phi(0,75) = 0,2266$$

$$P(\mu_2 > \mu_{mp}) = 1 - \Phi\left(\frac{0,26 - 0,18}{0,4}\right) = 1 - \Phi(0,2) = 0,42.$$

С точки зрения полезности в данной ситуации финансовый менеджер может принять решение об инвестировании денежных средств во вторую финансовую операцию, так как при этом вероятность погашения задолженности больше: $P(\mu_2 > \mu_{mp}) > P(\mu_1 > \mu_{mp})$. Кроме того, вероятность погашения задолженности для второй финансовой операции больше, чем вероятность получения убытков:

$$P(\mu_2 > \mu_{mp}) > P(\mu_1 < 0).$$

В соответствии с рекомендациями Базельского комитета по банковскому надзору для оценки рыночных и кредитных рисков в нормальных условиях ведения бизнеса широко используется так называемый показатель стоимости под риском (VaR).

Стоимость под риском – это максимальный размер убытков (по абсолютной величине), которые можно ожидать при владении портфелем финансовых инструментов в течение некоторого заданного интервала времени в нормальных рыночных условиях при заданном уровне доверительной вероятности.

$$P(\Delta S < VaR) = 1 - \alpha. \tag{3.14}$$

Смысл данного определения поясняется рис. 3.1, на котором приведен график плотности вероятности доходности активов (портфеля) финансовых инструментов) при владении ими в течение заданного времени. Под нормальными рыночными условиями ведения бизнеса подразумевается неизменность (постоянство) закона распределения доходности активов на заданном интервале времени.

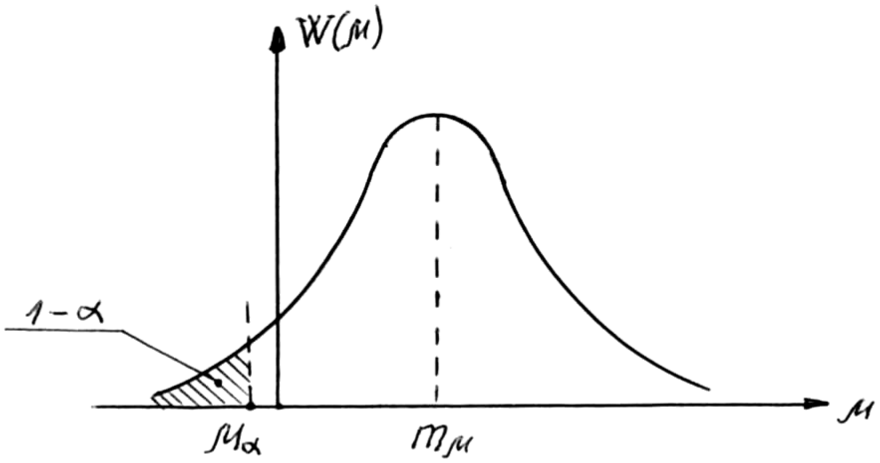

Рис. 3.1. Определение стоимости под риском

Доверительная вероятность α определяется интегралом.

$$\alpha = \int_{\mu_\alpha}^{\infty} W(\mu)d\mu = P(\mu > \mu_\alpha).$$

Вероятность $1-\alpha = P(\mu \le \mu_\alpha) = \int_{-\infty}^{\mu_\alpha} w(\mu)d\mu$ называют уровнем значимости.

При первоначальной стоимости активов S_0 стоимость под риском определяется как:

$$VaR = \left| S_0 \mu_\alpha \right|. \qquad (3.15)$$

Таким образом, VaR - это:

1) ожидаемый убыток от колебания стоимости портфеля активов, которое может произойти за данный период времени с заданной вероятностью возникновения, определяющейся формулой (3.14);

2) величина убытка (3.15), который может быть превышен с вероятностью $(1-\alpha)$ в течение заданного интервала T (периода прогноза).

Для вычисления стоимости под риском необходимо знание плотности вероятности доходности финансовых активов. Эта плотность вероятности определяется методами математической статистики по результатам оценки доходности финансовых активов на интервале времени, предшествующем прогнозируемому периоду.

3.3. Методы уменьшения риска финансовых операций

3.3.1. Диверсификация

Данный метод уменьшения рисков заключается в распределении временно свободных финансовых средств по нескольким не зависимым друг от друга финансовым операциям. Предположим, что некоторая сумма средств S_0 распределяется по n независимым друг от друга финансовым операциям:

$$S_0 = S_{0_1} + S_{0_2} + \ldots + S_{0_n} = \sum_{i=1}^{n} S_{0_i}.$$

По завершении финансовых операций полученная сумма финансовых средств будет равна:

$$S_t = S_{0_1}(1+\mu_1) + S_{0_2}(1+\mu_2) + \ldots + S_{0_n}(1+\mu_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} S_{0_i}(1+\mu_i) = S_0(1+\mu_\Sigma), \qquad (3.16)$$

где μ_i - доходность по i-й финансовой операции ($i = 1 \div n$);

μ_Σ - суммарная доходность по всем финансовым операциям.

Формулу (3.16) можно преобразовать к виду:

$$S_0(1+\mu_\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} S_{0_i} + \sum_{i=1}^{n} S_{0_i}\mu_i$$
$$\mu_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i, \quad S_0 = \sum_{i=1}^{n} S_{0_i}, \qquad (3.17)$$

где $x_i = \dfrac{S_{0_i}}{S_0}$ - стоимостная доля средств, вложенных в i-ю финансовую операцию $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Как отмечалось в п. 3.1 и 3.2, в реальных условиях доходности по каждой финансовой операции являются случайными, а значит, и суммарная доходность также будет случайной величиной. Оценку рисков данных финансовых операций будем осуществлять по коэффициенту вариации доходности:

$$k_{B\Sigma} = \frac{\sigma_{\mu\Sigma}}{m_{\mu\Sigma}},$$

где $\sigma_{\mu\Sigma}$ и $m_{\mu\Sigma}$ - соответственно среднеквадратическое отклонение суммарной доходности и математическое ожидание суммарной доходности.

Если i-е финансовые операции являются независимыми, то для $m_{\mu\Sigma}$ и $\sigma_{\mu\Sigma}$ можно с учетом формулы (3.17) записать следующие равенства:

$$m_{\mu\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} x_i m_{\mu i}$$
$$\sigma_{\mu\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{\mu i}^2}. \qquad (3.18)$$

Коэффициент вариации по данным финансовым операциям определится отношением

$$k_{B\Sigma} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{\mu i}^2}}{\sum_{i=1}^{n} x_i m_{\mu i}}. \qquad (3.19)$$

При одинаковых значениях средних доходностей по всем финансовым операциям $m_{\mu i} = m_\mu$ формула (3.19) упрощается и может быть в виде:

$$k_{B\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 k_{Bi}^2}, \qquad (3.20)$$

где $k_{Bi} = \dfrac{\sigma_{\mu i}}{m_{\mu}}$ - коэффициент вариации по каждой i-й финансовой операции.

При $n = 2$ значения долей финансирования x_1 и x_2, обеспечивающие минимальное значение $k_{B\Sigma}$ (минимальные риски), можно вычислить по формулам: $x_1 = \dfrac{k_{B_2}^2}{k_{B_1}^2 + k_{B_2}^2}$; $\quad x_2 = \dfrac{k_{B_1}^2}{k_{B_1}^2 + k_{B_2}^2}$. (3.21)

При этих значениях x_1 и x_2 минимальное значение коэффициента вариации будет равно $k_{B\Sigma\min} = \dfrac{k_{B_1} k_{B_2}}{\sqrt{k_{B_1}^2 + k_{B_2}^2}}$. (3.22)

Из формулы (3.21) видно, что оптимальные доли финансовых средств x_1 и x_2, обеспечивающие $k_{B\Sigma\min}$, определяются равенством:

$$x_1 k_{B_1}^2 = x_2 k_{B_2}^2.$$

Из рис. 3.2 и формулы (3.22) видно, что коэффициент вариации суммарной доходности по двум независимым финансовым операциям будет меньше, чем наименьшее значение коэффициента вариации из используемых двух операций.

При $k_{B_1} = k_{B_2} = k_B$ минимальное значение $k_{B\Sigma}$ (минимальные риски) обеспечивается при $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$, а минимальное значение коэффициента вариации равно $k_{B\Sigma\min} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

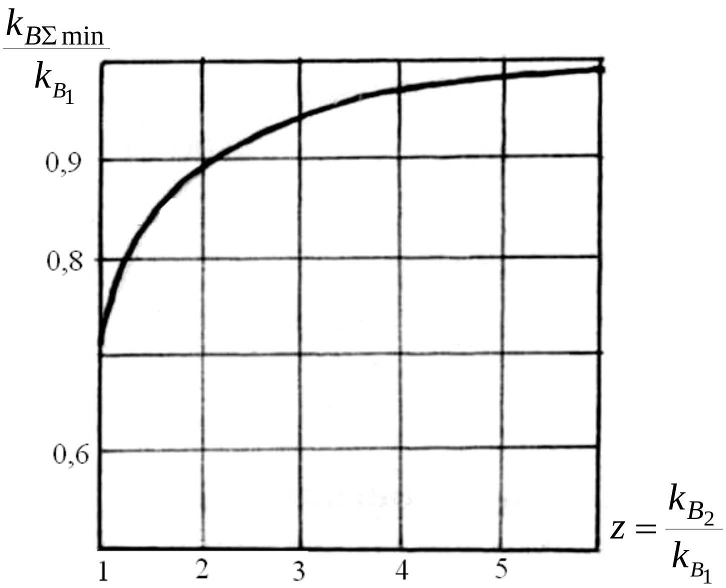

Рис. 3.2. Зависимость минимального значения суммарного коэффициента вариации от соотношения коэффициентов вариации по двум финансовым операциям

Можно также показать, что при одинаковых рисках каждой i-й финансовой операции ($k_{B_i} = \mathrm{const} = k_B$) минимальное значение коэффициента вариации по всем i-м операциям $k_{B\Sigma\min}$ обеспечивается при равных стоимостных долях средств, вложенных в каждую финансовую операцию $x_i = \frac{1}{n}$, и, как видно из выражения (3.22), будет равно:

$$k_{B\Sigma\min} = \frac{k_B}{\sqrt{n}}.$$

Из данной формулы видно, что отношение риска $\sigma_{\mu\Sigma}$ суммарной финансовой операции, состоящей из "n" независимых финансовых операций, к ее среднему доходу $m_{\mu\Sigma}$ при одинаковых коэффициентах вариации по каждой i-й финансовой операции ($k_{B_i} = k_B$) может быть в $\sqrt{n}$ раз меньше финансового риска каждой i-й финансовой операции. Этот эффект называется эффектом диверсификации. Данный принцип распределения инвестиционных средств известен как принцип "не класть все яйца в одну корзину".

Следует отметить, что метод диверсификации дает эффект только при распределении инвестируемых средств в независимые друг от друга финансовые операции, когда случайные доходности по i-м финансовым операциям, по крайней мере, не коррелированны.

3.3.2. Хеджирование

Суть хеджирования состоит в подборе к основной финансовой операции таких дополнительных финансовых операций, которые при их совместном проведении уменьшают риск. При хеджировании не накладывается ограничение на независимость финансовых операций. Если основная и дополнительная финансовые операции являются коррелированными (зависимыми), то для среднеквадратического отклонения суммарной доходности этих двух операций можно записать:

$$\sigma_{\mu_\Sigma} = \sqrt{x_1^2\sigma_{\mu_1}^2 + x_2^2\sigma_{\mu_2}^2 + 2x_1 x_2\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}, \tag{3.23}$$

где ρ_{12} - коэффициент корреляции доходностей основной μ_1 и дополнительных финансовых операций, определяющийся по формуле:

$$\rho_{12} = \frac{M[\mu_1 \cdot \mu_2] - M(\mu_1)M(\mu_2)}{\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}}.$$

Значения коэффициента взаимной корреляции могут находиться в пределах $-1 < \rho_{12} < 1$. При $\rho_{12} = 0$ основная и дополнительная операции не коррелированны (независимы). При увеличении рисков по одной финансовой операции риски по другой операции также увеличиваются, если $\rho_{12} > 0$, а если $\rho_{12} < 0$, то риски по второй финансовой операции имеют тенденцию к снижению.

Дифференцируя формулу (3.23) по x_1 с учетом $x_2 = 1 - x_1$ и приравнивая производную к нулю, получим, что оптимальные значения x_1 и x_2, обеспечивающие минимальное значение $\sigma_{\mu\Sigma\min}$, определяются формулами:

$$x_1 = \frac{\sigma_{\mu_2}^2 - \sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}{\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 - 2\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}$$

$$x_2 = \frac{\sigma_{\mu_1}^2 - \sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}{\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 - 2\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}. \tag{3.24}$$

Математическое ожидание суммарной доходности основной и дополнительной финансовой операции при соблюдении неравенств $m_{\mu_1} m_{\mu_2} < m_{\mu_i}$; $\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12} < m_i$; $i = \overline{1;2}$ определится формулой:

$$m_{\mu\Sigma} = \sum_{i=1}^{2} x_1 m_{\mu_1} = x_1 m_{\mu_1} + x_2 m_{\mu_2}.$$

При одинаковых значениях средних доходностей $m_{\mu_1} = m_{\mu_2} = m_\mu$ для суммарной доходности получим $m_{\mu\Sigma} = m_\mu$, а для коэффициента вариации суммарной доходности с учетом формулы (3.23) получим:

$$k_{B\Sigma} = \frac{\sigma_{\mu\Sigma}}{m_\mu} = \sqrt{x_1^2 k_{B_1}^2 + x_2^2 k_{B_2}^2 + 2x_1 x_2 k_{B_1} k_{B_2} \rho_{12}}. \tag{3.25}$$

Из формулы (3.25) видно, что при $\rho_{12} < 0$ коэффициент вариации (риск) суммарной финансовой операции уменьшается при уменьшении ρ_{12} до -1.

Дифференцируя формулу (3.24) по x_1 с учетом $x_2 = (1 - x_1)$ и приравнивая производную нулю, получим, что оптимальные значения долей основной x_1 и дополнительной x_2 финансовых операций, обеспечивающие минимальное значение суммарного риска $k_{B\Sigma\min}$ при хеджировании, можно вычислить по формулам:

$$x_1 = \frac{k_{B_2}^2 - k_{B_1} k_{B_2}\rho_{12}}{k_{B_1}^2 + k_{B_2}^2 - 2k_{B_1} k_{B_2}\rho_{12}}$$

$$x_2 = \frac{k_{B_1}^2 - k_{B_1} k_{B_2}\rho_{12}}{k_{B_1}^2 + k_{B_2}^2 - 2k_{B_1} k_{B_2}\rho_{12}}, \tag{3.26}$$

при $\rho_{12} \le 0$.*

---

* При $\rho_{12} > 0$ не выполняются условия $x_1>0$; $x_2>0$ $x_1+x_2=1$.

Формулы (3.24) и (3.26) дают одинаковые значения оптимальных долей финансирования, так как при $m_{\mu_1} = m_{\mu_2} = m_\mu$, поделив числитель и знаменатель в формуле (3.24) на m_μ, мы получим формулы (3.26).

Оптимальные значения стоимостных долей финансовых операций при различных значениях средних доходностей $m_{\mu_1} \neq m_{\mu_2}$ будут получены в п. 4.3.

Из формул (3.26) видно, что при $k_{B_1} = k_{B_2}$ оптимальные значения долей основной и дополнительной финансовых операций одинаковы: $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$. На рис. 3.3 приведены зависимости оптимальных значений x_1 и x_2 от отношения $z = \dfrac{k_{B_2}}{k_{B_1}}$ при различных значениях коэффициента корреляции ρ_{12} основной и дополнительной финансовой операции. Из графиков рис. 3.3 следует, что при $z > 1$ $(k_{B_2} > k_{B_1})$ стоимостная доля основной операции x_1 должна быть больше $x_1 > x_2$, так как риски по этой финансовой операции меньше ($k_{B_1} < k_{B_2}$). С уменьшением коэффициента корреляции ρ_{12} от 0 до -1 разница между стоимостными долями финансовых операций незначительно уменьшается.

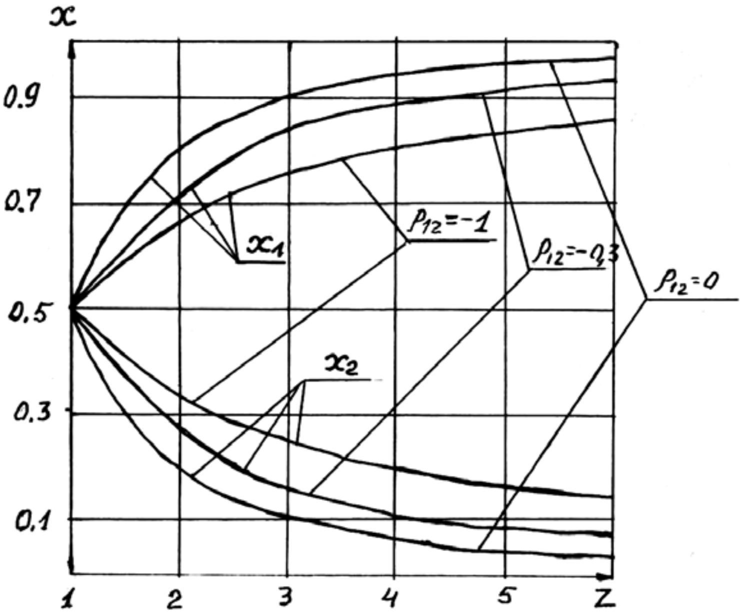

Рис. 3.3. Зависимость оптимальных значений стоимостных долей финансовых операций от соотношения коэффициентов вариаций

После подстановки формул (3.26) в (3.25) для минимального значения коэффициента вариации суммарной доходности при хеджировании получим:

$$k_{B\Sigma\min} = \frac{k_{B_1} k_{B_2} \sqrt{1-\rho_{12}^2}}{\sqrt{k_{B_1}^2 + k_{B_2}^2 - 2k_{B_1} k_{B_2} \rho_{12}}} \quad \text{при} \;\; \rho_{12} \le 0. \qquad (3.27)$$

На рис. 3.4 приведены графики $k_{B\Sigma\min}$ от коэффициента корреляции основной финансовой операции ρ_{12} при двух значениях $z = \frac{k_{B_2}}{k_{B_1}}$.

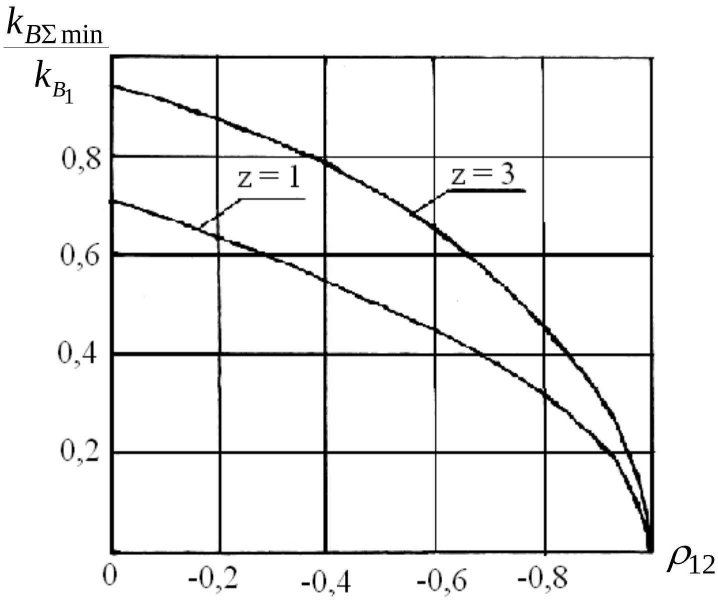

Рис. 3.4. Зависимость минимального значения суммарного коэффициента вариации от коэффициента корреляции доходностей финансовых операций

Из приведенных графиков видно, что для уменьшения коэффициента вариации (риска) суммарной финансовой операции при хеджировании нужно подбирать дополнительную финансовую операцию примерно с такими же рисками, как и по основной $k_{B_2} \approx k_{B_1}$; $z \approx 1$, и коэффициент взаимной корреляции рисков основной и дополнительной финансовой операции должен быть отрицательным $\rho_{12} < 0$.

На практике не всегда бывает просто подобрать дополнительную финансовую операцию при $\rho_{12} < -0{,}3$.

Разновидностями хеджирования являются такие финансовые операции, как опционы и страхование.

Опционы – это вид биржевой сделки с премией, уплачиваемой за право продать или купить финансовый актив в определенном количестве по цене и в сроки, оговоренные в опционном контракте.

Страхование – это финансовая операция, направленная на компенсацию (в денежной форме) возможных убытков при наступлении страхового случая.

3.4. Критерии принятия решений в условиях полной неопределенности

Если известны законы распределения доходности финансовой операции, развивающейся в той или иной экономической ситуации, или хотя бы вероятности различных возможных исходов данной финансовой операции, инвестор при принятии решения может руководствоваться вероятностными показателями, описанными в п. 3.2.

Но ситуация может быть полностью неопределенной, т. е. неизвестны ни вероятности различных исходов финансовой операции, ни, тем более, закон распределения доходности финансовой операции. В данных условиях полной неопределенности инвестор или лицо, принимающее решение, может только предположить возможные варианты развития экономической ситуации при ее совершении.

Предположим, что число возможных ситуаций конечно и равно L. В каждой предполагаемой j-й ситуации $(j = 1 \div L)$ лицо, принимающее решение (ЛПР) – инвестор, может принять N финансовых решений. В случае принятия i-го финансового решения $(i = 1 \div N)$ могут быть рассчитаны доходности финансовой операции μ_{ij} при принятии i-го решения в j-й экономической ситуации. Эти возможные значения доходности μ_{ij} образуют матрицу доходностей.

$$M = \begin{array}{c|ccccc} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & \ldots & L \\ \hline 1 & \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \ldots & \mu_{1L} \\ 2 & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \ldots & \mu_{2L} \\ 3 & \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \ldots & \mu_{3L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{N} & \mu_{N1} & \mu_{N2} & \mu_{N3} & & \mu_{NL} \end{array} \qquad (3.28)$$

Предположим, инвестором предполагаются три возможных варианта развития ситуации L = 3. В каждой из возможных ситуаций ЛПР может принять по четыре решения N = 4. Анализ развития финансовой операции при принятии i-го решения в j-й экономической ситуации позволил определить все элементы матрицы доходностей.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}05 & -0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}08 \\ 0{,}18 & 0{,}16 & 0{,}17 \\ 0{,}2 & 0{,}14 & 0{,}22 \end{pmatrix} \qquad (3.29)$$

Как было отмечено в п. 3.2, принимаемое решение в условиях неопределенности зависит от склонности ЛПР к риску. Поясним подходы к определению риска в данной ситуации полной неопределенности.

Определим величины риска, которые соответствуют принятию i-го решения в j-й ситуации - r_{ij}. Если бы ЛПР однозначно знало ситуацию, которая реально сложится при развитии финансовой операции, то выбрало бы решение, обеспечивающее максимальную доходность. Если реальная ситуация соответствовала бы j-й, было бы принято решение, обеспечивающее максимальную доходность:

$$\mu_{\max}(j) = \max_i \mu_{ij}. \tag{3.30}$$

При принятии любого i-го решения в j-й ситуации ЛПР рискует получить доходность не $\mu_{\max}(j)$, а только μ_{ij}. При таком определении риски r_{ij} логично определять разностью:

$$r_{ij} = \mu_{\max}(j) - \mu_{ij}. \tag{3.31}$$

Элементы r_{ij}, рассчитываемые по формуле (3.31), образуют матрицу рисков. Составим матрицу рисков, соответствующую матрице доходностей (3.29). Для максимальных доходностей $\mu_{\max}(j)$ в соответствии с формулой (3.30) получим $\mu_{\max}(1) = 0{,}2;$ $\mu_{\max}(2) = 0{,}16;$ $\mu_{\max}(3) = 0{,}22.$

В соответствии с формулой (3.31) матрица рисков будет иметь вид:

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}11 & 0{,}27 \\ 0{,}05 & 0{,}06 & 0{,}14 \\ 0{,}02 & 0 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}02 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

По матрице доходностей (3.27) могут быть приняты финансовые решения, являющиеся оптимальными по тому или иному критерию. При принятии финансовых решений используют следующие критерии.

3.4.1. Правило Вальда

При принятии решения в соответствии с данным правилом предполагают, что будет иметь место самая неблагоприятная ситуация. В соответствии с данным предположением правило Вальда называют также правилом крайнего пессимизма. Самая неблагоприятная ситуация характеризуется самой малой доходностью:

$$\mu_{i\min} = \min_j \mu_{ij}. \tag{3.33}$$

В соответствии с матрицей доходности (3.29) по правилу (3.33) находим:

$$\mu_{1\min} = -0{,}05; \qquad \mu_{2\min} = 0{,}08;$$

$$\mu_{3\min} = 0{,}16; \qquad \mu_{4\min} = 0{,}14.$$

Правило Вальда рекомендует принять решение i_0 с наибольшим значением $\mu_{i\min}$, т. е.

$$i_0 \Rightarrow \max_i \left(\min_j \mu_{ij} \right). \tag{3.34}$$

В соответствии с правилом (3.34) оптимальным по правилу Вальда будет третье решение $i_0 = 3$ с доходностью:

$$\mu_0 = \max_i \left(\min_j \mu_{ij} \right) = 0{,}16.$$

3.4.2. Правило "розового оптимизма"

В соответствии с этим правилом предполагается, что будет действовать самая благоприятная ситуация, которая при любом *i*-м решении обеспечит максимальную доходность:

$$\mu_{i\max} = \max_i \mu_{ij}. \tag{3.35}$$

В соответствии с матрицей доходности (3.29) по правилу (3.35) находим:

$$\mu_{1\max} = 0{,}1; \qquad \mu_{2\max} = 0{,}15;$$

$$\mu_{3\max} = 0{,}18; \qquad \mu_{4\max} = 0{,}22.$$

Оптимальным решением по правилу "розового оптимизма" является решение i_0, обеспечивающее максимальную доходность из всех $\mu_{i\max}$:

$$i_0 \Rightarrow \max_i \left(\max_j \mu_{ij} \right). \tag{3.36}$$

Из приведенных значений $\mu_{i\max}$ видно, что по правилу "розового оптимизма" оптимальным решением будет четвертое решение $i_0 = 4$ с доходностью:

$$\mu_0 = \max_i \left(\max_j \mu_{ij} \right) = 0{,}22.$$

3.4.3. Правило Гурвица

По правилу Гурвица оптимальным считается решение i_0, которое обеспечивает максимум взвешенной суммы доходностей пессимистического (3.34) и оптимистического (3.36) подходов:

$$i_0 \Rightarrow \max_i \left[\lambda \min_j \mu_{ij} + (1-\lambda) \max_j \mu_{ij} \right], \tag{3.37}$$

где $0 \le \lambda \le 1$ - весовой коэффициент, значение которого выбирается лицом, принимающим решение из субъективных соображений.

При $\lambda = 1$ правило Гурвица совпадает с правилом Вальда, а при $\lambda = 0$ - с правилом "розового оптимизма".

Вычислим значения:

$$\mu_i(\lambda) = \lambda \min_j \mu_{ij} + (1-\lambda) \max_j \mu_{ij} \tag{3.38}$$

для двух значений λ.

При $\lambda = 0{,}5$ получим следующие значения $\mu_i(\lambda)$:

$$\mu_1(0{,}5) = 0{,}5(0{,}1 - 0{,}05) = 0{,}025$$

$$\mu_2(0{,}5) = 0{,}5(0{,}08 + 0{,}15) = 0{,}115$$

$$\mu_3(0{,}5) = 0{,}5(0{,}16 + 0{,}18) = 0{,}17$$

$$\mu_4(0{,}5) = 0{,}5(0{,}14 + 0{,}22) = 0{,}18.$$

В соответствии с правилом (3.37) видно, что оптимальным является четвертое решение $i_0 = 4$.

При $\lambda = 0{,}8$ получим следующие значения $\mu_i(\lambda)$:

$$\mu_1(0{,}8) = \frac{0{,}2 - 0{,}04}{10} = 0{,}016$$

$$\mu_2(0{,}8) = \frac{0{,}64 + 0{,}3}{10} = 0{,}094$$

$$\mu_3(0{,}8) = \frac{1{,}28 + 0{,}36}{10} = 0{,}164$$

$$\mu_4(0{,}8) = \frac{1{,}12 + 0{,}44}{10} = 0{,}156.$$

Из вычисленных значений $\mu_i(\lambda)$ видно, что при $\lambda = 0{,}8$ оптимальным является третье решение $i_0 = 3$.

3.4.4. Правило Сэвиджа

Правило Сэвиджа называют также правилом минимального риска. При применении этого правила анализируется матрица рисков $R = | r_{ij} |$ и предполагается, что будет действовать ситуация максимального риска:

$$r_{i\max} = \max_j r_{ij}. \tag{3.39}$$

В соответствии с правилом Сэвиджа оптимальным считается решение i_0, при котором обеспечивается минимальное значение $r_{i\max}$

$$i_0 \Rightarrow \min_i \left(\max_j r_{ij} \right). \tag{3.40}$$

По приведенным выше значениям элементов матрицы $R = | r_{ij} |$ (3.32) для $r_{i\max}$ в соответствии с равенством (3.39) получим:

$$r_{1\max} = 0{,}27; \qquad r_{2\max} = 0{,}14;$$

$$r_{3\max} = 0{,}05; \qquad r_{4\max} = 0{,}02.$$

Из вышеперечисленных значений $r_{i\max}$ и правила (3.40) следует, что оптимальным является четвертое решение $i_0 = 4$ при минимальном значении риска $r_{i\max} = r_{4\max} = 0{,}02$.

Контрольные вопросы и задания

1. Привести перечень и дать характеристику факторов, от которых зависит доходность финансовых операций в условиях неопределенности.
2. Записать математическое выражение для совместной плотности вероятностей доходностей двух финансовых операций. Пояснить смысл величин $m_1; m_2; \sigma_{\mu_1}; \sigma_{\mu_2}; \rho$.
3. Определение математического ожидания суммарной доходности двух зависимых финансовых операций.
4. Определение математического ожидания и среднеквадратического отклонения суммарной доходности для "n" независимых финансовых операций.
5. Количественная оценка риска финансовой операции. Определение вероятности получения отрицательной доходности финансовой операции. Коэффициент вариации как количественная оценка риска финансовой операции.
6. Две финансовые операции характеризуются следующими значениями доходности и риска: $m_{\mu_1} = 0{,}1; \sigma_{\mu_1} = 0{,}08;$ $m_{\mu_2} = 0{,}18;$ $\sigma_{\mu_2} = 0{,}3.$ Определить, для какой финансовой операции риск получения отрицательной доходности будет больше.
7. Количественная оценка риска финансовых операций по показателю (VaR) – стоимости под риском. Пояснить смысл этого показателя.
8. Математическое ожидание и дисперсия доходности финансовой операции соответственно равны $m_\mu = 0{,}12;$ $D_\mu = 0{,}09.$ Определить коэффициент вариации доходности "k_B" и вероятность того, что доходность данной финансовой операции будет больше требуемого значения $\mu_{тр} \geq 0{,}2.$
9. Диверсификация как метод уменьшения рисков финансовых операций.
10. Организация инвестирует временно свободные средства в две независимые финансовые операции с математическими ожиданиями и среднеквадратическими значениями доходностей $m_{\mu_1} = 0{,}12;$ $\sigma_{\mu_1} = 0{,}15;$ $m_{\mu_2} = 0{,}12;$ $\sigma_{\mu_2} = 0{,}18.$ Определить значение долей финансирования первой x_1 и второй x_2 финансовых операций, при которых обеспечиваются минимальные риски $k_{B\Sigma\min}$. Определить суммарную

ожидаемую доходность $m_{\mu\Sigma}$ и среднеквадратическое отклонение суммарной доходности $\sigma_{\mu\Sigma}$ при вычисленных значениях долей финансирования x_1 и x_2.

11. Хеджирование как метод уменьшения рисков финансовых операций. Формулы для определения математического ожидания, среднеквадратического отклонения и коэффициента вариации суммарной доходности по двум зависимым финансовым операциям.

12. Определить оптимальные значения стоимостных долей инвестиций в две зависимые финансовые операции x_1 и x_2, обеспечивающие минимум среднеквадратического отклонения суммарной доходности $\sigma_{\mu\Sigma\min}$, если среднеквадратические отклонения доходностей и коэффициент корреляции по этим операциям равны $\sigma_{\mu_1} = 0{,}12$; $\sigma_{\mu_2} = 0{,}18$; $\rho_{12} = -0{,}4$. Для вычисленных значений x_1 и x_2 определить значение $\sigma_{\mu\Sigma\min}$.

13. Определить оптимальные значения стоимостных долей инвестиций в две зависимые финансовые операции x_1 и x_2, обеспечивающие минимум коэффициента вариации суммарной доходности $k_{B\Sigma\min}$, если доходности по этим операциям характеризуются следующими значениями: $m_{\mu_1} = 0{,}12; \sigma_{\mu_1} = 0{,}15$; $m_{\mu_2} = 0{,}12$; $\sigma_{\mu_2} = 0{,}21$; $\rho_{12} = -0{,}3$. Для вычисленных значений x_1 и x_2 определить значения $m_{\mu\Sigma}$; $\sigma_{\mu\Sigma}$ и $k_{B\Sigma\min}$.

14. Определить значения коэффициента корреляции финансовых операций ρ_{12}, при котором для оптимальных значениях стоимостных долей инвестирования в эти операции минимальное значение коэффициента вариации суммарной доходности будет не больше 0,5 ($k_{B\Sigma\min} \le 0{,}5$), если коэффициенты вариации доходностей по этим финансовым операциям имеют значения $k_{B_1} = 0{,}8$, $k_{B_2} = 1{,}2$.

15. Изменение внешних условий может привести к трем (L = 3) возможным вариантам развития ситуации. В каждой из этих ситуаций финансовый менеджер может принять четыре (N = 4) управленческих решения. Для данной ситуации экспертным методом определена возможная матрица доходностей:

$$M = \underbrace{\left.\begin{matrix} 0{,}1 & 0{,}05 & -0{,}01 \\ 0{,}15 & 0{,}09 & 0{,}06 \\ 0{,}2 & 0{,}13 & 0{,}11 \\ 0{,}18 & 0{,}17 & 0{,}19 \end{matrix}\right\}}_{L} N.$$

Составить матрицу рисков, соответствующую данной матрице доходностей.

16. По матрице доходностей, приведенной в условии задачи 15, определить оптимальное решение по правилу Вальда.

17. По матрице доходностей, приведенной в условии задачи 15, определить оптимальное управленческое решение по правилу "розового оптимизма".

18. По матрице доходностей, приведенной в условии задачи 15, определить оптимальное управленческое решение по правилу Гурвица при $\lambda = 0{,}7$.

19. Для матрицы рисков

$$R = \underbrace{\left.\begin{matrix} 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}2 \\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}15 \\ 0 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}04 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}}_{L} N.$$

Определить оптимальное управленческое решение по правилу Сэвиджа.

4. Портфельный анализ

4.1. Виды ценных бумаг и их классификация

Ценная бумага – это документ установленной формы и реквизитов, удостоверяющий имущественные права, осуществление или передача которых возможна только при предъявлении этого документа.

В ГК РФ (ст. 143) перечисляются следующие виды документов, которые относятся к ценным бумагам:

– государственная облигация;

– облигация;

– вексель;

– чек;

– депозитный сертификат;

– сберегательный сертификат;

– банковская сберегательная книжка на предъявителя;

– коносамент;

– акция;

– приватизационные ценные бумаги.

В ст. 912 ГК РФ (часть вторая) вводятся еще четыре вида ценных бумаг:

– двойное складское свидетельство;

– складское свидетельство как часть двойного свидетельства;

– залоговое свидетельство (вариант) как часть двойного свидетельства;

– простое складское свидетельство.

Федеральным законом РФ "Об ипотеке (залоге недвижимости)" законодательно закреплен 15-й вид российской ценной бумаги – *закладная*.

Федеральным законом РФ "Об инвестиционных фондах" (2011 г.) введен в действие последний 16-й вид российской ценной бумаги – *инвестиционный пай*.

Юридически разрешенными к выпуску и обращению в России являются следующие восемь ценных бумаг: акция, облигация, вексель, чек, банковский сертификат, коносамент, закладная и инвестиционный пай.

Акция – это эмиссионная ценная бумага, закрепляющая право ее владельца (акционера) на получение части прибыли акционерного общества в виде дивидендов, участие в управлении акционерным обществом и на получение части имущества, остающейся после его ликвидации (ФЗ РФ "О рынке ценных бумаг").

Облигация – это эмиссионная ценная бумага, закрепляющая право ее держателя на получение от эмитента облигации в предусмотренный ею срок номинальной стоимости и зафиксированного в ней процента от этой стоимости или имущественного эквивалента (ФЗ РФ "О рынке ценных бумаг").

Эмитентом облигаций могут быть государство (государственная облигация), органы местного самоуправления (муниципальная облигация) и юридические лица (банки – банковские облигации, другие компании – корпоративные облигации).

Вексель – это ценная бумага, удовлетворяющая письменное денежное обязательство должника о возврате долга, форма и обращение которого регулируются специальным законодательством – вексельным правом.

Различают два вида векселей:

простой вексель – это ценная бумага, удостоверяющая безусловное обязательство (обещание) должника уплатить векселедателю долг через определенный срок времени;

переводной вексель – это ценная бумага, удостоверяющая предложение должнику уплатить указанную в ней сумму денег обозначенному в ней лицу через определенный срок.

Чек - это ценная бумага, удостоверяющая письменное поручение чекодателя банку уплатить чекополучателю указанную в чеке сумму денег в течение срока ее действия.

Чек, по сути, представляет собой переводной вексель, который выписывается только банком.

Банковский сертификат – ценная бумага, представляющая собой свободно обращающееся свидетельство о денежном вкладе (депозитном – для юридических лиц и сберегательном – для физических лиц) в банке с обязательством последнего о возврате этого вклада и процентов по нему через установленный срок в будущем.

Коносамент – ценная бумага, представляющая собой документ стандартной формы, принятой в международной практике, на перевозку груза, удостоверяющий его погрузку и получение.

Закладная – это именная ценная бумага, удостоверяющая право ее владельца в соответствии с договором об ипотеке (залоге недвижимости), на получение денежного обязательства или указанного в ней имущества.

Инвестиционный пай – это именная ценная бумага, удостоверяющая долю его владельца в праве собственности на имущество, составляющее паевой инвестиционный фонд.

Форма ценной бумаги имеет ряд реквизитов или экономических характеристик, наряду с их сущностным содержанием. Указанные рыночные характеристики обычно имеют попарно противоположный характер (например, бумажная и безбумажная формы существования), и поэтому ценные бумаги классифицируют в зависимости от того, к какому признаку из соответствующей им паре они отвечают. Совокупность этих признаков, присущих ценной бумаге, составляет ее экономическое содержание.

В табл. 4.1 приведены сравнительные характеристики (классификация) основных видов российских ценных бумаг.

Таблица 4.1

Вид ценной бумаги	Срок существования	Форма существования	Форма владения	Форма вложения средств	Форма выпуска	Вид эмитента
Акция	Бессрочная	Любая	Именная	Долевая	Эмиссионная	Корпорация, банк
Облигация	Срочная	Любая	Любая	Долевая	Эмиссионная	Юридическое лицо
Вексель	Срочная	Документарная	Любая	Долевая	Неэмиссионная	Любой
Банковский сертификат	Срочная	Документарная	Любая	Долевая	Неэмиссионная	Корпорация
Коносамент	Срочная	Документарная	Любая	Долевая	Неэмиссионная	Корпорация
Закладная	Срочная	Документарная	Именная	Долевая	Неэмиссионная	Корпорация

Набор характеристик, которыми обладает ценная бумага, включает:

Временные характеристики – срок существования, когда выпущена в обращение, на какой период действия или бессрочно.

Пространственные характеристики:

– форма существования – документарная (бумажная) или бездокументарная (безбумажная);

– национальная принадлежность – отечественная или иностранная (другого государства).

Рыночные характеристики:

– порядок фиксации владельца – на предъявителя или на конкретное лицо (юридическое или физическое);

– форма выпуска – эмиссионная, т. е. выпускаемая отдельными сериями, внутри которых все ценные бумаги совершенно одинаковы по своим характеристикам, или неэмиссионная (индивидуальная);

– вид эмитента, т. е. того, кто выпускает на рынок ценную бумагу: государство, муниципалитеты, банки, корпорации, частные лица;

– степень обращаемости – свободно обращается на рынке или есть ограничения;

– уровень риска – высокий, средний, низкий и т. п.;

– наличие начисляемого дохода – выплачивается какой-то доход (дивиденд) или нет;

– порядок передачи (форма обращения) – вручение, уступка прав требования: цессия или индоссамент (передаточная надпись на ценной бумаге, удостоверяющая переход всех или части прав ЦБ к другому лицу);

– регистрируемость – регистрируемая или нерегистрируемая;

– вид номинала – постоянный или переменный.

Важнейшими характеристиками ценной бумаги являются характеристики, определяющие ее качество.

Качество ценной бумаги – это мера реализации прав, которыми наделена ценная бумага, или мера ее потребительской стоимости. Качество ценной бумаги находит свое отражение в следующих экономических характеристиках:

– *ликвидность ценной бумаги* – это мера воплощения ее прав на переход от одного владельца к другому;

– *доходность ценной бумаги* – это мера воплощения ее прав на получение дохода ее владельцем;

– *риск ценной бумаги* – это мера неопределенности, связанной с осуществлением прав (прежде всего, на доход и на обращение), которыми она наделена.

Ликвидность ценной бумаги – это сочетание прав на передачу ее от одного владельца к другому с осуществимостью этого права. Она находит свое выражение в перечне разрешенных форм перехода прав собственности на нее в объемах и сроках этого перехода (купля-продажа ценной бумаги бывает ограниченной).

Другие экономические характеристик ценной бумаги более подробно рассмотрим в следующем параграфе.

4.2. Доходность и риск ценной бумаги и портфеля ценных бумаг

Для определения доходности ценной бумаги необходимо вначале дать определение ее стоимости. Понятие стоимости ценной бумаги не совпадает с понятием стоимости обычного товара как материализованного продукта общественно необходимого труда на его производство. Стоимость ценной бумаги имеет двойственный характер, состоящий в единстве действительного капитала и производного капитала.

Стоимость в качестве представителя действительного капитала характеризуется нарицательной стоимостью ценной бумаги.

Стоимость в качестве производного капитала характеризуется рыночной стоимостью ценной бумаги.

Нарицательная стоимость ценной бумаги находит свое выражение в той сумме денег, которую ценная бумага представляет при обмене ее на действительный капитал при ее выпуске или погашении. Эта сумма денег называется *номиналом ценной бумаги*.

Рыночная стоимость ценной бумаги возникает в результате капитализации ее имущественных прав. Главное имущественное право в ценной бумаге – это ее право на доход, поэтому рыночная стоимость ценной бумаги есть, прежде всего, капитализация этого дохода в течение некоторого периода времени. Говорить о рыночной стоимости имеет смысл в отношении ценных бумаг, которые обладают правом оборачиваемости на рынке ценных бумаг.

Владельцу ценных бумаг совершенно безразличен источник получаемого дохода и из чего он (доход) складывается. Предположим, что в начале некоторого временного интервала стоимость ценной бумаги была равна P_0, а в конце интервала ее стоимость равна P_t. Тогда доходность ценных бумаг, по которым не предусмотрены выплаты дивидендов, за время t определится формулой:

$$\mu_t = \frac{P_t - P_0}{P_0} = \frac{P_t}{P_0} - 1. \tag{4.1}$$

Для ценных бумаг, по которым предусмотрена выплата дивидендов, доходность можно определить формулой:

$$\mu_t = \frac{P_t + P_\partial - P_0}{P_0} = \frac{P_t + P_\partial}{P_0} - 1, \tag{4.2}$$

где P_∂ - сумма всех дивидендов, выплаченных по ценной бумаге за интервал времени t.

Риск ценной бумаги характеризует неопределенность в осуществимости прав и целей владельца ценной бумаги. В соответствии с основным правом ценной бумаги – получением дохода, основным видом ее риска является риск доходности.

Осуществление прав по ценной бумаге зависит, с одной стороны, от лица, несущего обязательства по ней, а с другой стороны, от многих факторов, от него не зависящих.

Поскольку на практике всегда имеется какой-то средний уровень получения доходности по ценной бумаге, количественная оценка риска осуществляется по среднеквадратическому отклонению доходности от среднего ожидаемого значения σ_μ (см. п. 3.2) или по отношению среднеквадратического отклонения доходности σ_μ к среднему ожидаемому значению доходности m_μ, называемому коэффициентом вариации.

Для оценки доходности портфеля ценных бумаг будем считать, что портфель состоит из n видов ценных бумаг. Если в начальный момент времени суммарную стоимость всех ценных бумаг i-го вида обозначить P_{0i}, то суммарную стоимость всего портфеля ценных бумаг можно определить по формуле:

$$P_{ПО} = \sum_{i=1}^{n} P_{0i}. \tag{4.3}$$

Доходность портфеля ценных бумаг по аналогии с формулой (4.2) можно определить по формуле:

$$\mu_П = \frac{P_{Пt} + P_{\partial П} - P_{ПО}}{P_{ПО}}, \qquad (4.4)$$

где $P_{ПО}$ определяется формулой (4.3);

$P_{Пt} = \sum_{i=1}^{n} P_{it}$ - стоимость портфеля ценных бумаг в конце периода t;

$P_{\partial П} = \sum_{i=1}^{n} P_{\partial i}$ - стоимость дивидендов, полученных по всем ценным бумагам портфеля.

Формулу (4.4) для оценки доходности портфеля за время t можно представить в виде:

$$\mu_П = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \cdots + x_n\mu_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i, \qquad (4.5)$$

где $x_i = \frac{P_{0i}}{P_{ПО}}$ - ценовая доля инвестиций в ценные бумаги i-го вида;

μ_i - доходность по всем бумагам i-го вида.

Докажем справедливость формулы (4.5). Для каждой бумаги i-го вида ее стоимость $P_{it}^{(1)}$ в момент времени t в соответствии с формулой (4.2) можно записать:

$$P_{it}^{(1)} = \mu_i P_{i0}^{(1)} + P_{i0}^{(1)} - P_{\partial i}^{(1)}. \qquad (4.6)$$

Умножая равенство (4.6) на n_i – количество бумаг i-го вида и суммируя по всем видам ценных бумаг, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} n_i P_{it}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} n_i P_{\partial i}^{(1)} - \sum_{i=1}^{n} n_i P_{i0}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} n_i \mu_i P_{i0}^{(1)}, \qquad (4.7)$$

где $\sum_{i=1}^{n} n_i P_{it}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} P_{it} = P_{Пi}$ - стоимость портфеля ценных бумаг в конце периода t;

$\sum_{i=1}^{n} n_i P_{i0}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} P_{i0} = P_{П0}$ - начальная стоимость портфеля ценных бумаг;

$\sum_{i=1}^{n} n_i P_{\partial i}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} P_{\partial i} = P_{\partial П}$ - сумма дивидендов, полученных по всем ценным бумагам портфеля за период времени t.

Разделив левую и правую части равенства (4.7) на $P_{П0}$, получим, что доходность портфеля ценных бумаг определяется формулой (4.5):

$$\mu_{П0} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i.$$

Стоимость финансовых средств P_{i0}, инвестируемых в ценные бумаги, в начале периода является неслучайной, известной величиной. Стоимость бумаг P_{it} в конце периода времени t определяется рынком ценных бумаг и является случайной величиной, поэтому и доходность портфеля ценных бумаг $\mu_П$ является случайной величиной.

Математическое ожидание доходности портфеля ценных бумаг $m_{П\mu}$ называют эффективностью портфеля. Учитывая свойства математического ожидания случайных величин для эффективности портфеля, с учетом формулы (4.5) получим:

$$m_{n\mu} = x_1 m_{\mu_1} + x_2 m_{\mu_2} + \cdots + x_n m_{\mu_k} = \sum_{i=1}^{k} x_i m_{\mu_i}, \tag{4.8}$$

где m_{μ_1} - эффективность ценной бумаги i-го вида $i = (1 \div k)$.

Величину риска портфеля ценных бумаг оценивают среднеквадратическим отклонением доходности портфеля $\mu_П$ от ее среднего значения $m_{n\mu}$.

$$\sigma_{n\mu} = \sqrt{M[(\mu_П - m_{n\mu})^2},$$

где символ $M[X]$ обозначает математическую операцию нахождения среднего значения.

Если в портфеле ценные бумаги разных видов можно считать независимыми, то по аналогии с формулами (3.18) и (3.19) для оценки риска портфеля ценных бумаг можно воспользоваться формулами для среднеквадратического отклонения доходности портфеля:

$$\sigma_{n\mu} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \sigma_{\mu_i}^2} \tag{4.9}$$

и для коэффициента вариации портфеля ценных бумаг:

$$k_{ВП} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \sigma_{\mu_i}^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i m_{\mu_i}}}. \tag{4.10}$$

4.3. Портфель из двух видов ценных бумаг

Эффективность и риск портфеля из двух видов ценных бумаг можно оценить по формулам:

$$\begin{aligned} &m_{n\mu} = x_1 m_{\mu_1} + x_2 m_{\mu_2} \\ &\sigma_{n\mu} = \sqrt{x_1^2 \sigma_{\mu_1}^2 + x_2^2 \sigma_{\mu_2}^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_{\mu_1} \sigma_{\mu_2} \rho_{12}}, \\ &x_1 + x_2 = 1, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где ρ_{12} - коэффициент корреляции доходностей по ценным бумагам первого и второго вида;

x_1 и x_2 – ценовая доля первого и второго вида ценных бумаг.

Коэффициент вариации портфеля, состоящего из двух видов ценных бумаг, можно определить по формуле:

$$k_{ВП} = \frac{\sigma_{n\mu}}{m_{n\mu}} = \frac{\sqrt{x_1^2\sigma_{\mu_1}^2 + x_2^2\sigma_{\mu_2}^2 + 2x_1x_2\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}}{x_1m_{\mu_1} + x_2m_{\mu_2}}. \quad (4.12)$$

На рис. 4.1а приведены зависимости эффективности портфеля ценных бумаг $m_{n\mu}/m_{\mu_1}$ и рисков портфеля ценных бумаг $\sigma_{n\mu}^2/\sigma_{\mu_1}^2$ от ценовой доли бумаг первого вида x_1 при $\rho_{12} = 0$. Зависимость $m_{n\mu}/m_{\mu_1}$ от x_1 приведена на рис. 4.1а пунктирной линией при трех значениях отношения эффективностей ценных бумаг второго и первого вида:

1. $m_{\mu_2}/m_{\mu_1} = 0{,}3;$ 2. $m_{\mu_2}/m_{\mu_1} = 0{,}5;$ 3. $m_{\mu_2}/m_{\mu_1} = 0{,}7.$

Эта зависимость имеет линейный характер. Эффективность портфеля ценных бумаг изменяется от $m_{n\mu} = m_{\mu_2}$ при x_1=0 до $m_{n\mu} = m_{\mu_2}$ при x_1=1. Зависимость отношения $\sigma_{n\mu}^2/\sigma_{\mu_1}^2$, характеризующего риски портфеля ценных бумаг, от x_1 приведена на рис. 4.1а сплошными линиями при трех значениях отношения:

1. $\sigma_{\mu^2}^2/\sigma_{\mu_1}^2 = 0{,}3;$ 2. $\sigma_{\mu^2}^2/\sigma_{\mu_1}^2 = 0{,}5;$ 3. $\sigma_{\mu^2}^2/\sigma_{\mu_1}^2 = 0{,}7.$

Из приведенных графиков видно, что риск портфеля ценных бумаг двух видов $\sigma_{n\mu}$ при определенном оптимальном значении ценовой доли бумаг x_1 может иметь минимальное значение. Так например, при $\sigma_{\mu^2}^2/\sigma_{\mu_1}^2 = 0{,}7$ минимальное значение $\sigma_{n\mu}^2/\sigma_{\mu_1}^2$ при x_1=0,4 будет равно 0,412. При оптимальном значении x_1 выполняется соотношение $\sigma_{n\mu}^2 = 0{,}412\sigma_{\mu_1}^2 < \sigma_{\mu_2}^2 = 0{,}7\sigma_{\mu_1}^2 < \sigma_{\mu_1}^2$, т. е. при оптимальном распределении ценовой доли бумаг риск портфеля ценных бумаг двух видов будет меньше, чем риски ценных бумаг первого и второго видов (см. п. 3.3.1).

На рис. 4.1б приведены зависимости коэффициента вариации портфеля ценных бумаг $k_{ВП}/k_{B_1}$ от ценовой доли бумаг первого вида x_1 при $\sigma_{\mu_2}^2/\sigma_{\mu_1}^2 = 0{,}5$, $\rho_{12} = 0$ и при трех значениях отношения:

1. $m_{\mu_2}/m_{\mu_1} = 0{,}2;$ 2. $m_{\mu_2}/m_{\mu_1} = 0{,}5;$ 3. $m_{\mu_2}/m_{\mu_1} = 0{,}8.$

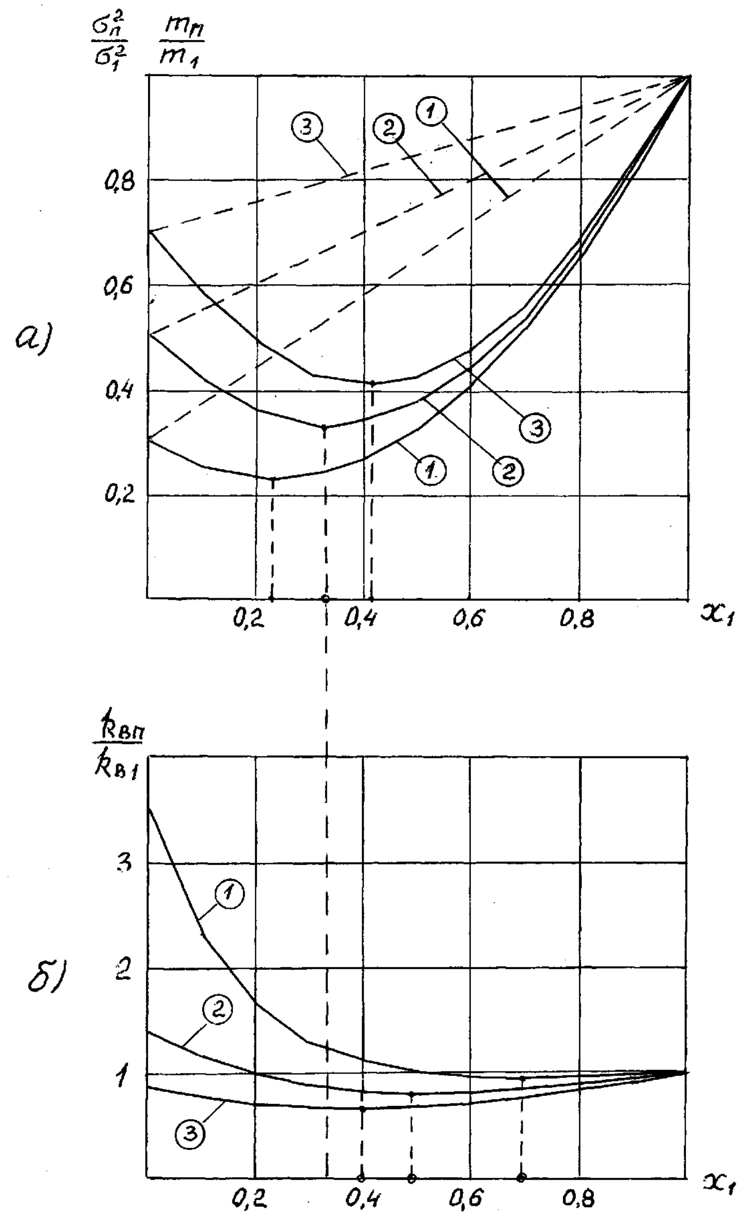

Рис. 4.1. Зависимость риска независимых бумаг двух видов от ценовой доли бумаг первого вида

Из приведенных графиков видно, что при определенных оптимальных значениях x_1 имеют место минимальные значения коэффициента вариации портфеля ценных бумаг. При $m_{\mu_2} = m_{\mu_1}$, когда эффективности ценных бумаг первого и второго вида одинаковы, минимальное значение коэффициента вариации портфеля $k_{ВП}$ ценных бумаг будет при ценовых долях бумаг первого x_1 и второго x_2 вида, определяющихся формулами (3.21), а минимальное значение $k_{ВП\min}$ определится формулой (3.22).

Оптимальные значения распределения ценовых долей бумаг x_1 и x_2, обеспечивающие минимальное значение риска портфеля $[\sigma^2_{П\mu} / \sigma^2_{\mu_1}]\min$ (рис. 4.1а), также могут быть определены по формулам (3.21).

При $m_{\mu_2} \neq m_{\mu_1}$ оптимальные значения распределения ценовых долей бумаг первого x_1 и второго вида x_2 могут быть найдены дифференцированием формул (4.11) и (4.12) по x_1 и приравниванием производной нулю.

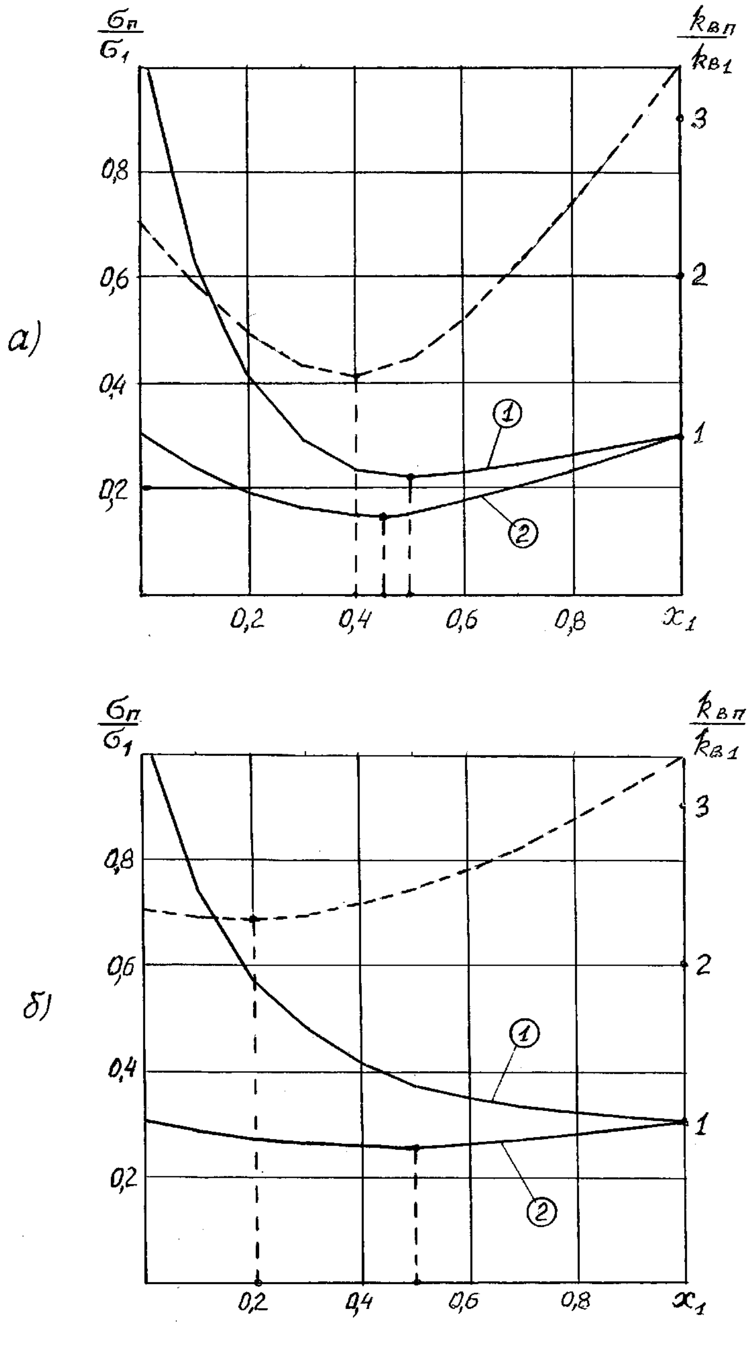

Рис. 4.2. Зависимость риска зависимых ценных бумаг двух видов от ценовой доли бумаг первого вида

Оптимальное распределение ценовых долей бумаг x_1 и x_2, обеспечивающих минимум среднеквадратического значения рисков $\sigma_{\mu \min}$ портфеля зависимых ценных бумаг, можно определить по формулам:

$$x_1 = \frac{\sigma_{\mu_2}^2 - \sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}{\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 - 2\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}$$
$$x_2 = \frac{\sigma_{\mu_1}^2 - \sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}{\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 - 2\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}. \quad (4.13)$$

Графики зависимости отношения $\sigma_{\mu n} / \sigma_{\mu_1}$ от ценовой доли бумаг первого вида x_1 при $\sigma_{\mu_2} / \sigma_{\mu_1} = 0{,}707$ приведены пунктирными линиями для $\rho_{12} = -0{,}5$ на рис. 4.2а и для $\rho_{12} = 0{,}5$ на рис. 4.2б. Из рисунков видно, что при отрицательных значениях коэффициента корреляции ценных бумаг имеет место оптимальное распределение ценовых долей бумаг x_1 и x_2 (формула (4.13). При положительных значениях коэффициента корреляции ценных бумаг $\rho_{12} > 0{,}5$ минимума значения $\sigma_{\mu n}$ не наблюдается.

Сплошными линиями на рис. 4.2а и б приведены зависимости отношения $k_{ВП} / k_{В_1}$ от ценовой доли бумаг первого вида x_1 при $\sigma_{\mu_2}^2 / \sigma_{\mu_1}^2 = 0{,}5$ и при $m_{\mu_2} / m_{\mu_1} = 0{,}2$ (кривая 1) и $m_{\mu_2} / m_{\mu_1} = 0{,}7$ (кривая 2). Из приведенных графиков видно, что оптимальные значения x_1 и x_2, обеспечивающие минимумы $\sigma_{\mu n \min}$ и $k_{ВП \min}$ не совпадают.

Оптимальное распределение ценовой доли бумаг первого и второго вида, обеспечивающее минимум коэффициента вариации портфеля ценных бумаг $k_{ВП \min}$, может быть рассчитано по формулам:

$$x_1 = \frac{\sigma_{\mu_2}^2 \frac{m_{\mu_1}}{m_{\mu_2}} - \sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}{\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 - 2\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12} + [\sigma_{\mu_2}^2 - \sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}]\left(\frac{m_{\mu_1}}{m_{\mu_2}} - 1\right)}$$
$$x_2 = \frac{\sigma_{\mu_1}^2 - \frac{m_{\mu_1}}{m_{\mu_2}}\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}}{\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 - 2\sigma_{\mu_2}\sigma_{\mu_2}\rho_{12} + [\sigma_{\mu_2}^2 - \sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\rho_{12}]\left(\frac{m_{\mu_1}}{m_{\mu_2}} - 1\right)}. \quad (4.14)$$

4.4. Портфель из *m*-независимых ценных бумаг

Для независимых ценных бумаг парные коэффициенты корреляции доходностей этих ценных бумаг равны нулю:

$$\rho_{ij} = 0, \text{ при } i \neq j \quad i = 1 \div m; \;\; j = 1 \div m.$$

В этом случае риск портфеля этих ценных бумаг определяется формулой:

$$\sigma_{\mu n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_{\mu_i}^2 x_i^2},$$

где σ_{μ_i} - риски доходностей ценных бумаг i-го вида, определяющиеся среднеквадратическим значением доходностей; x_i – ценовая доля бумаг i-го вида.

Определим структуру портфеля ценных бумаг минимального риска $\sigma_{\mu n \min}$. Эта же структура портфеля ценных бумаг обеспечивает минимум $\sigma_{\mu n}^2$, поэтому оптимальное распределение ценовых долей ценных бумаг будем искать из условия:

$$\min_{x_i} \sigma_{\mu n}^2 = \min_{x_i} \sum_{i=1}^{m} \sigma_{\mu_i}^2 x_i^2; \text{ при } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1. \qquad (4.15)$$

Данная задача нахождения оптимального распределения $x_i \;\; i = 1 \div n$ может быть решена с помощью функции Лагранжа. Для задачи, формализуемой условиями (4.15), функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{\mu_i}^2 x_i^2 + \lambda \left[\sum_{i=1}^{m} x_i - 1 \right].$$

Для нахождения оптимальных значений $x_i; \;\; i = 1 \div m$, обеспечивающих минимум $\sigma_{\mu n}^2$, составим систему уравнений из производных функции Лагранжа по x_i и λ.

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta x_1} = 2\sigma_{\mu_1}^2 x_1 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\delta L}{\delta x_2} = 2\sigma_{\mu_2}^2 x_2 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\delta L}{\delta x_3} = 2\sigma_{\mu_3}^2 x_3 + \lambda = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\delta L}{\delta x_m} = 2\sigma_{\mu_m}^2 x_m + \lambda = 0 \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda} = \sum_{i=1}^{m} x_i - 1 = 0. \end{cases} \qquad (4.16)$$

Для получения конкретных результатов далее ограничимся портфелем, состоящим из четырех видов бумаг $m = 4$. В этом случае система уравнений (4.16) будет включать пять уравнений, четвертое из которых будет иметь вид:

$$\frac{\delta L}{\delta x_4} = 2\sigma_{\mu_4}^2 x_4 + \lambda = 0.$$

Последовательно вычитая из первого уравнения второе, затем третье и затем четвертое, получим:

$$\sigma_{\mu_1}^2 x_1 = \sigma_{\mu_2}^2 x_2; \; \sigma_{\mu_1}^2 x_1 = \sigma_{\mu_3}^2 x_3; \; \sigma_{\mu_1}^2 x_1 = \sigma_{\mu_4}^2 x_4.$$

Определим из этих уравнений значения x_2; x_3 и x_4

$$x_2 = \frac{\sigma_{\mu_1}^2}{\sigma_{\mu_2}^2} x_1; \quad x_3 = \frac{\sigma_{\mu_1}^2}{\sigma_{\mu_3}^2} x_1; \quad x_4 = \frac{\sigma_{\mu_1}^2}{\sigma_{\mu_4}^2} x_1. \qquad (4.17)$$

Подставим эти значения в пятое уравнение системы (4.16), получим:

$$x_1 \left[1 + \frac{\sigma_{\mu_1}^2}{\sigma_{\mu_2}^2} + \frac{\sigma_{\mu_1}^2}{\sigma_{\mu_3}^2} + \frac{\sigma_{\mu_1}^2}{\sigma_{\mu_4}^2} \right] = 1.$$

Отсюда для x_1 получим:

$$x_1 = \frac{\sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2}{\sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2 + \sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_4}^2 + \sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2}. \qquad (4.18)$$

С учетом формул (4.17) для ценовых долей бумаг второго, третьего и четвертого видов получим:

$$x_2 = \frac{\sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2}{\sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2 + \sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_4}^2 + \sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2}$$

$$x_3 = \frac{\sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_4}^2}{\sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2 + \sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_4}^2 + \sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2} \qquad (4.19)$$

$$x_4 = \frac{\sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2}{\sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2 + \sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_4}^2 + \sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2}.$$

Минимальное значение риска портфеля из четырех видов ценных бумаг определится формулой:

$$\sigma_{\mu n \min} = \frac{\sigma_{\mu_1} \sigma_{\mu_2} \sigma_{\mu_3} \sigma_{\mu 4}}{\left[\sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2 + \sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_4}^2 + \sigma_{\mu_1}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 \sigma_{\mu_3}^2 \sigma_{\mu_4}^2 \right]^{1/2}}, \qquad (4.20)$$

а средняя доходность такого портфеля будет равна:

$$m_{\mu n} = \sum_{i=1}^{m} x_i m_{\mu_i}.$$

Пример 4.1. Для портфеля из четырех видов ценных бумаг со средней доходностью m_{μ_i} и рисками σ_{μ_i}, соответственно равными:

$$m_{\mu_1} = 0{,}05; \quad \sigma_{\mu_1} = 0{,}1; \quad m_{\mu_2} = 0{,}1; \quad \sigma_{\mu_2} = 0{,}2;$$

$$m_{\mu_3} = 0{,}15; \quad \sigma_{\mu_3} = 0{,}45; \quad m_{\mu_4} = 0{,}2; \quad \sigma_{\mu_4} = 0{,}7,$$

найти оптимальную структуру портфеля минимального риска, его риск $\sigma_{\mu n}$ и среднюю доходность $m_{\mu n}$.

Решение: По формулам (4.19) находим оптимальные значения ценовых долей бумаг каждого вида.

$$x_1 = \frac{(0{,}2)^2(0{,}45)^2(0{,}7)^2}{(0{,}1)^2(0{,}2)^2(0{,}45)^2 + (0{,}1)^2(0{,}2)^2(0{,}7)^2 + (0{,}1)^2(0{,}45)^2(0{,}7)^2 + (0{,}2)^2(0{,}45)^2(0{,}7)^2} =$$

$$= \frac{396{,}9 \cdot 10^{-5}}{523{,}825 \cdot 10^{-5}} = 0{,}7577.$$

$$x_2 = \frac{(0{,}1)^2(0{,}45)^2(0{,}7)^2}{523{,}825 \cdot 10^{-5}} = \frac{99{,}225 \cdot 10^{-5}}{523{,}825 \cdot 10^{-5}} = 0{,}1894.$$

$$x_3 = \frac{(0{,}1)^2(0{,}2)^2(0{,}7)^2}{523{,}825 \cdot 10^{-5}} = \frac{19{,}6 \cdot 10^{-5}}{523{,}825 \cdot 10^{-5}} = 0{,}0374.$$

$$x_4 = \frac{(0{,}1)^2(0{,}2)^2(0{,}45)^2}{523{,}825 \cdot 10^{-5}} = \frac{8{,}1 \cdot 10^{-5}}{523{,}825 \cdot 10^{-5}} = 0{,}0155.$$

По формуле (4.20) определяем минимальное значение риска портфеля ценных бумаг:

$$\sigma_{\mu n \min} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}7}{\sqrt{52{,}3825 \cdot 10^{-4}}} = \frac{0{,}0063}{0{,}0724} = 0{,}087.$$

Для средней доходности такого портфеля получим:

$$m_{\mu n} = 0{,}7577 \cdot 0{,}05 + 0{,}1894 \cdot 0{,}1 + 0{,}0374 \cdot 0{,}15 + 0{,}0155 \cdot 0{,}2 = 0{,}0655.$$

Из приведенных расчетов видно, что риск портфеля оказался меньше, чем риск наименее рискованных бумаг первого вида $\sigma_{\mu n} < \sigma_{\mu_1}$, а средняя доходность (эффективность) портфеля ценных бумаг оказывается больше, чем доходность бумаг первого вида $m_{\mu n} < m_{\mu_1}$. Таким образом, для оптимального портфеля минимального риска коэффициент вариации портфеля ценных бумаг равен $k_{Bn} = \sigma_{\mu n} / m_{\mu n} = \frac{0{,}087}{0{,}0655} \approx 1{,}33,$ и это значение меньше, чем коэффициент вариации наименее рискованных бумаг первого вида $k_{B_1} = \sigma_{\mu_1} / m_{\mu_1} = \frac{0{,}1}{0{,}05} = 2.$

4.5. Портфель минимального риска при заданной его эффективности

Рассмотрим портфель из двух видов бумаг, эффективность которых удовлетворяет условию $m_{\mu_2} < m_{\mu_1}$. Требуемая эффективность такого портфеля может быть задана в виде:

$$m_{\mu п} = x_1 m_{\mu_1} + x_2 m_{\mu_2} \ge m_{\mu тр},$$
$$x_1 + x_2 = 1, \qquad (4.21)$$

где значение $m_{\mu тр}$ может быть задано в пределах $m_{\mu_2} \le m_{\mu тр} \le m_{\mu_1}$.

Сделав замену переменной $x_2 = 1 - x_1$, структуру портфеля, удовлетворяющую условию (4.21), можно определить в виде:

$$1 \ge x_1 \ge \frac{m_{\mu тр} - m_{\mu_1}}{m_{\mu_1} - m_{\mu_2}}$$
$$\frac{m_{\mu_1} - m_{\mu тр}}{m_{\mu_1} - m_{\mu_2}} \ge x_2 \ge 0. \qquad (4.22)$$

При задании эффективности портфеля в виде равенства в уравнении (4.21) $m_{\mu п} = m_{\mu тр}$. Структура портфеля определена однозначно:

$$x_1 = \frac{m_{\mu тр} - m_{\mu_2}}{m_{\mu_1} - m_{\mu_2}}$$
$$x_2 = \frac{m_{\mu_1} - m_{\mu тр}}{m_{\mu_1} - m_{\mu_2}}. \qquad (4.23)$$

В этом случае риск портфеля из двух видов бумаг однозначно определится формулой.

$$\sigma^2_{\mu п} = x_1^2 \sigma^2_{\mu_1} + (1 - x_1)^2 \sigma^2_{\mu_2} + 2\rho_{12} x_1 (1 - x_1) \sigma_{\mu_1} \sigma_{\mu_2}. \qquad (4.24)$$

При задании эффективности портфеля в виде неравенства (4.21) структура портфеля минимального риска определяется наименьшим значением функции (4.24) на интервале значений x_1, заданных неравенством (4.22). Для нахождения наименьшего значения функции (4.24) на интервале (4.22) необходимо:

1) Приравнять производную функции (4.24) по x_1 нулю и из решения полученного уравнения определить значение x_{1opt}, при котором обеспечивается минимум риска портфеля ценных бумаг $\sigma_{\mu п \min}$.

2) Если вычисленное значение x_{1opt} удовлетворяет неравенству:

$$1 > x_{1opt} > \frac{m_{\mu тр} - m_{\mu_2}}{m_{\mu_1} - m_{\mu_2}}, \qquad (4.25)$$

то это значение x_{1opt} является решением поставленной задачи. Ценовая доля бумаг второго вида находится из условия $x_2 = 1 - x_{1opt}$.

3) Если вычисленное значение x_{1opt} не удовлетворяет неравенству (4.25), то значение x_1, обеспечивающее минимальный риск при заданной эффективности, определяется значением одной из границ интервала (4.25). Значение x_{1opt}, обеспечивающее минимум $\sigma^2_{\mu п}$, определяется формулой:

$$x_{1opt}=\frac{\sigma_2^2-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}=\frac{\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}-\rho_{12}}{\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}+\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}-2\rho_{12}}$$

$$x_{2opt}=\frac{\sigma_1^2-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}=\frac{\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}-\rho_{12}}{\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}+\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}-2\rho_{12}}. \tag{4.26}$$

Из формул (4.26) и условий $x_1>0,\ x_2>0$ следует, что минимальное значение риска портфеля $\sigma_{\mu n\min}$ существует при значениях коэффициента корреляции:

$$-1<\rho_{12}<\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\ \ \text{при}\ \ \sigma_2<\sigma_1$$

$$-1<\rho_{12}<\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\ \ \text{при}\ \ \sigma_1<\sigma_2. \tag{4.27}$$

Пример 4.2. Определить стоимостные доли x_1 и x_2 портфеля ценных бумаг двух видов, обеспечивающие минимальный риск портфеля при заданной его эффективности $m_{\mu n}\geq m_{mp}=0{,}14$, если эффективности и риски бумаг первого и второго вида соответственно равны $m_{\mu_1}=0{,}1,\quad \sigma_{\mu_1}=0{,}08;\ m_{\mu_2}=0{,}2,\quad \sigma_{\mu_2}=0{,}1.$

Решение. Определим диапазон возможных значений стоимостной доли бумаг первого вида в соответствии с условием (4.21):

$$m_{\mu n}=x_1m_{\mu_1}+(1-x_1)m_{\mu_2}\geq m_{mp},$$

$$x_1(m_{\mu_1}-m_{\mu_2})\geq m_{mp}-m_{\mu_2}.$$

Так как по условию задачи $m_{\mu_1}-m_{\mu_2}<0,$ то для x_1 получим:

$$0\leq x_1\leq\frac{m_{mp}-m_{\mu_2}}{m_{\mu_1}-m_{\mu_2}}=\frac{-0{,}06}{-0{,}1}$$

$$0\leq x_1\leq 0{,}6 \tag{4.28}$$

$$0{,}4\leq x_2\leq 1.$$

По формулам (4.26) определим значения x_{1opt} и x_{2opt}, обеспечивающие минимальный риск портфеля ценных бумаг при двух различных значениях коэффициента корреляции доходностей ценных бумаг. Из условий (4.27) следует, что при заданных рисках ценных бумаг оптимальные значения x_{1opt} и x_{2opt} существуют для коэффициентов корреляции, принимающих значение в интервале:

$$-1 < \rho_{12} < 0{,}8.$$

Вычислим значения x_{1opt} и x_{2opt} для коэффициента корреляции $\rho_{12} = 0{,}4$:

$$x_{1opt} = \frac{0{,}01 - 0{,}4 \cdot 0{,}008}{0{,}0064 + 0{,}01 - 0{,}8 \cdot 0{,}008} = 0{,}68$$

$$x_{2opt} = 1 - x_{1opt} = 1 - 0{,}68 = 0{,}32.$$

Для коэффициента корреляции $\rho_{12} = -0{,}8$ оптимальная структура портфеля ценных бумаг двух видов определится значениями:

$$x_{1opt} = \frac{0{,}01 + 0{,}8 \cdot 0{,}008}{0{,}0064 + 0{,}01 + 1{,}6 \cdot 0{,}008} = 0{,}562$$

$$x_{2opt} = 1 - x_{1opt} = 1 - 0{,}562 = 0{,}438.$$

Из приведенных расчетов видно, что при $\rho_{12} = -0{,}8$ значения x_{1opt} и x_{2opt} удовлетворяют неравенствам (4.28). Значит, структура портфеля минимального риска при его заданной эффективности определяется следующими значениями ценовых долей бумаг первого и второго вида: $x_1 = 0{,}562$; $x_2 = 0{,}438$. При этих значениях эффективность портфеля бумаг будет равна:

$$m_{\mu n} = 0{,}562 \cdot 0{,}1 + 0{,}438 \cdot 0{,}2 = 0{,}1438 > m_{mp},$$

а минимальный риск портфеля ценных бумаг будет иметь значение:

$$\sigma_{\mu n} = [(0{,}68)^2 \cdot 0{,}0064 + (0{,}32)^2 \cdot 0{,}01 - 1{,}6 \cdot 0{,}68 \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}008]^{1/2} = 0{,}0346.$$

При $\rho_{12} = 0{,}4$ вычисленные функции x_{1opt} и x_{2opt} не удовлетворяют неравенствам (4.28). Это значит, что оптимальная структура портфеля ценных бумаг, обеспечивающая минимум $\sigma_{\mu n}$ при его заданной эффективности, определяется одной из границ интервала (4.28).

При $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ для значений $m_{\mu n}$ и $\sigma_{\mu n}$ получим:

$$m_{\mu n} = m_{\mu_2} = 0{,}2 > m_{mp}$$

$$\sigma_{\mu n} = \sigma_{\mu_2} = 0{,}1.$$

При $x_1 = 0{,}6$ и $x_2 = 0{,}4$ эффективность и риск портфеля ценных бумаг определяются значениями:

$$m_{\mu n} = 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 14 = m_{mp}$$

$$\sigma_{\mu n} = [(0{,}6)^2 0{,}0064 + (0{,}4)^2 0{,}01 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}008]^2 \approx 0{,}074.$$

Таким образом, при $\rho_{12} = 0{,}4$ оптимальная структура портфеля ценных бумаг, обеспечивающая минимальный риск портфеля при заданной его эффективности, определяется значениями $x_1 = 0{,}6$ и $x_2 = 0{,}4$.

Рассмотрим методику определения структуры портфеля ценных бумаг, состоящего из трех видов независимых бумаг, обеспечивающей минимальный риск портфеля при заданной его эффективности. Данную задачу можно представить в формализованном виде:

$$\begin{cases} \min\limits_{x_1;x_2;x_3} \left[\sigma^2_{\mu n} = x_1^2\sigma^2_{\mu_1} + x_2^2\sigma^2_{\mu_2} + x_3^2\sigma^2_{\mu_3}\right] \\ m_{\mu n} = x_1 m_{\mu_1} + x_2 m_{\mu_2} + x_3 m_{\mu_3} = m_{mp} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases} \tag{4.29}$$

где выполняются соотношения:

$$m_{\mu_3} < m_{\mu_2} < m_{\mu_1}$$

$$m_{\mu_3} < m_{mp} < m_{\mu_1}.$$

Сделаем замену переменных $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ получим:

$$x_1 m_{\mu_1} + x_2 m_{\mu_2} + m_{\mu_3} - x_1 m_{\mu_3} - x_2 m_{\mu_3} = m_{mp}$$

отсюда для x_1 получим:

$$x_1 = \frac{m_{mp} - m_{\mu_3}}{m_{\mu_1} - m_{\mu_3}} - x_2\frac{m_{\mu_2} - m_{\mu_3}}{m_{\mu_1} - m_{\mu_3}} \tag{4.30}$$

$$x_1 = A - Bx_2,$$

где $A = \dfrac{m_{mp} - m_{\mu_3}}{m_{\mu_1} - m_{\mu_3}}$; $B = \dfrac{m_{\mu_2} - m_{\mu_3}}{m_{\mu_1} - m_{\mu_3}}$.

После подстановки соотношений $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ и $x_1 = A - Bx_2$ в формулу (4.29) для риска портфеля ценных бумаг получим:

$$\sigma^2_{\mu n} = (A - Bx_2)^2\sigma^2_{\mu_1} + x_2^2\sigma^2_{\mu_2} + [1 - A + (B-1)x_2]\sigma^2_{\mu_3}.$$

Дифференцируя данное уравнение по x_2 и приравнивая производную нулю, получим:

$$x_2[2B^2\sigma^2_{\mu_1} + 2\sigma^2_{\mu_2} + 2(B-1)^2\sigma^2_{\mu_3}] = 2AB(\sigma^2_{\mu_1} + \sigma^2_{\mu_3}) + 2\sigma^2_{\mu_3}(1 - A - B).$$

Отсюда для оптимального значения ценовой доли бумаг второго вида в портфеле из трех видов бумаг получим:

$$x_{2opt} = \frac{AB(\sigma^2_{\mu_1} + \sigma^2_{\mu_3}) + \sigma^2_{\mu_3}(1 - A - B).}{B^2(\sigma^2_{\mu_1} + \sigma^2_{\mu_3}) + (\sigma^2_{\mu_2} + \sigma^2_{\mu_3}) - 2B\sigma^2_{\mu_3}}.$$

С учетом равенств $x_1 = A - Bx_2$ и $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ для оптимальных значений ценовых долей бумаг первого, второго и третьего вида получим:

$$x_{1opt} = \frac{A(\sigma^2_{\mu_2} + \sigma^2_{\mu_3}) - AB\sigma^2_{\mu_3} - \sigma^2_{\mu_3}B(1-B).}{B^2(\sigma^2_{\mu_1} + \sigma^2_{\mu_3}) + (\sigma^2_{\mu_2} + \sigma^2_{\mu_3}) - 2B\sigma^2_{\mu_3}}$$

$$x_{2opt} = \frac{A \cdot B(\sigma^2_{\mu_1} + \sigma^2_{\mu_3}) + \sigma^2_{\mu_3}(1-A-B).}{B^2(\sigma^2_{\mu_1} + \sigma^2_{\mu_3}) + (\sigma^2_{\mu_2} + \sigma^2_{\mu_3}) - 2B\sigma^2_{\mu_3}} \qquad (4.31)$$

$$x_{3opt} = \frac{B\sigma^2_{\mu_1}(B-A) + \sigma^2_{\mu_2}(1-A)}{B^2(\sigma^2_{\mu_1} + \sigma^2_{\mu_3}) + (\sigma^2_{\mu_2} + \sigma^2_{\mu_3}) - 2B\sigma^2_{\mu_3}}.$$

Структура портфеля, определяющаяся ценовыми долями бумаг x_{1opt}, x_{2opt} и x_{3opt} (формулы (4.31), обеспечивает минимум риска портфеля ценных бумаг при заданной его эффективности (4.29).

Пример 4.3. Портфель состоит из трех видов независимых ценных бумаг, эффективность и риски которых имеют соответственно значения $m_{\mu_1} = 0{,}2,\ \sigma_{\mu_1} = 0{,}16;\ m_{\mu_2} = 0{,}16,\ \sigma_{\mu_2} = 0{,}1;\ \ m_{\mu_3} = 0{,}1,\ \sigma_{\mu_3} = 0{,}05.$

Определить структуру портфеля ценных бумаг x_{1opt}, x_{2opt} и x_{3opt}, обеспечивающую минимальный риск портфеля при его заданной эффективности $m_{mp} = 0{,}15$.

Решение. По формулам (4.30) определим значение коэффициентов A и B:

$$A = \frac{m_{mp} - m_{\mu_3}}{m_{\mu_1} - m_{\mu_3}} = \frac{0{,}15 - 0{,}1}{0{,}2 - 0{,}1} = 0{,}5$$

$$B = \frac{m_{\mu_2} - m_{\mu_3}}{m_{\mu_1} - m_{\mu_3}} = \frac{0{,}16 - 0{,}1}{0{,}2 - 0{,}1} = 0{,}6.$$

По формулам (4.31) определяем оптимальные значения ценовых долей ценных бумаг первого, второго и третьего вида:

$$x_{1opt} = \frac{0{,}5[(0{,}1)^2 + (0{,}05)^2] - 0{,}5 \cdot 0{,}6(0{,}05)^2 0{,}6(1-0{,}6)}{(0{,}6)^2[(0{,}16)^2 + (0{,}05)^2] + (0{,}1)^2 + (0{,}05)^2 - 2 \cdot 0{,}6(0{,}05)^2} \approx \frac{0{,}0098}{0{,}039232} \approx 0{,}2498$$

$$x_{2opt} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6[(0{,}16)^2 + (0{,}05)^2] + (0{,}05)^2(1-0{,}5-0{,}6)}{(0{,}6)^2[(0{,}16)^2 + (0{,}05)^2] + (0{,}1)^2 + (0{,}05)^2 - 2 \cdot 0{,}6(0{,}05)^2} \approx \frac{0{,}01636}{0{,}039232} \approx 0{,}417$$

$$x_{3opt} = \frac{0{,}6(0{,}16)^2(0{,}6-0{,}5) + (0{,}1)^2(1-0{,}5)}{0{,}039232} \approx \frac{0{,}013072}{0{,}039232} \approx 0{,}3332.$$

Правильность вычисления значений x_{1opt}, x_{2opt} и x_{3opt} можно проверить по формулам:

$$x_{1opt} = A - Bx_{2opt} = 0{,}5 - 0{,}6 \cdot 0{,}417 = 0{,}2498$$

$$x_{1opt} + x_{2opt} + x_{3opt} = 1; \quad 0{,}2498 + 0{,}417 + 0{,}3332 = 1.$$

Вычислим эффективность портфеля ценных бумаг:

$$m_{\mu n} = 0{,}2498 \cdot 0{,}2 + 0{,}417 \cdot 0{,}16 + 0{,}3332 \cdot 0{,}1 = 0{,}15 = m_{mp}.$$

Вычислим риск портфеля ценных бумаг:

$$\sigma_{\mu n} = [x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2]^{1/2} = [(0{,}2498)^2(0{,}16)^2 + (0{,}417)^2(0{,}1)^2 +$$

$$+ (0{,}3332)^2(0{,}05)^2]^{1/2} \approx \sqrt{0{,}0036} \approx 0{,}06.$$

4.6. Портфель максимальной эффективности при заданном его риске

Рассмотрим портфель, состоящий из двух видов бумаг. Задача нахождения структуры портфеля $(x_1$ и $x_2)$, обеспечивающей его максимальную эффективность при заданном риске, может быть записана в виде:

$$\begin{cases} m_{\mu n} = \max\limits_{x_1;x_2}[x_1 m_{\mu_1} + x_2 m_{\mu_2}] \\ \sigma_{\mu n}^2 = x_1^2\sigma_{\mu_1}^2 + x_2^2\sigma_{\mu_2}^2 + 2\rho_{12}x_1x_2\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2} \le \sigma_{mp}^2 \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \tag{4.32}$$

Из второго уравнения (4.32) можно определить две пары значений $x_1^{(2)}$; $x_2^{(2)}$. Для этого сделаем замену переменной $x_2 = 1 - x_1$

$$x_1^2\sigma_{\mu_1}^2 + (1 - x_1)^2 + 2\rho_{12}x_1(1 - x_1)\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2} = \sigma_{mp}^2$$

$$x_1^2(\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 - 2\rho_{12}\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}) - 2x_1(\sigma_{\mu_2}^2 - 2\rho_{12}\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}) + \sigma_{\mu_2}^2 - \sigma_{mp}^2 = 0.$$

Из решения данного уравнения находим:

$$x_1^{(1,2)} = x_{1opt} \pm \sqrt{D}, \tag{4.33}$$

где

$$x_{1opt} = \frac{\sigma_{\mu_2}^2 - \rho_{12}\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}}{\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 - 2\rho_{12}\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}}$$

$$D = \frac{\sigma_{mp}^2(\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 - 2\rho_{12}\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}) - \sigma_{\mu_1}^2\sigma_{\mu_2}^2(1 - \rho_{12}^2)}{(\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2 - 2\rho_{12}\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2})^2}. \tag{4.34}$$

Значения $x_2^{(1,2)}$ находим из условия:

$$x_2^{(1,2)} = 1 - x_1^{(1,2)} = x_{2opt} \pm \sqrt{D},$$

где $x_{2opt} = \dfrac{\sigma_{\mu_2}^2 - \rho_{12}\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}}{\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu 2}^2 - 2\rho_{12}\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}}$. (4.35)

При значениях x_{1opt} и x_{2opt} риск портфеля ценных бумаг будет минимальным (рис. 4.2). При значениях ценовых долей бумаг первого и второго вида:

$$x_1^{(1)} = x_{1opt} + \sqrt{D}; \quad x_2^{(1)} = x_{2opt} - \sqrt{D}, \tag{4.36}$$

а также при

$$x_1^{(2)} = x_{1opt} - \sqrt{D}; \quad x_2^{(2)} = x_{2opt} + \sqrt{D} \qquad (4.37)$$

риск портфеля ценных бумаг $\sigma_{\mu n}^2$ будет равен заданному значению σ_{mp}^2.

Второе неравенство в выражении (4.32) будет выполняться, когда значения x_1 и x_2 будут соответствовать условиям:

$$x_{1opt} - \sqrt{D} \le x_1 \le x_{1opt} + \sqrt{D}$$

$$x_{2opt} - \sqrt{D} \le x_2 \le x_{2opt} + \sqrt{D}.$$

Из рис. 4.1а видно, что эффективность портфеля ценных бумаг двух видов $m_{\mu n}$ изменяется линейно при изменении x_1 от 0 до 1. Из этого следует, что в зависимости от соотношения значений m_{μ_1} и m_{μ_2} портфель максимальной эффективности при заданном риске обеспечивается при структуре портфеля, определяющейся формулами (4.36) или (4.37).

Пример 4.4. Портфель ценных бумаг состоит из двух видов коррелированных (зависимых) бумаг со следующими значениями эффективности и риска: $m_{\mu_1} = 0{,}16$, $\sigma_{\mu_1} = 0{,}2$; $m_{\mu_2} = 0{,}08$, $\sigma_{\mu_2} = 0{,}06$; $\rho_{12} = -0{,}5$. Определить структуру портфеля ценных бумаг максимальной эффективности при заданном его риске $\sigma_{\mu n} < \sigma_{mp} = 0{,}055$.

Решение. Определим значения x_{1opt} и x_{2opt}, при которых обеспечивается минимальный риск портфеля ценных бумаг:

$$x_{1opt} = \frac{(0{,}06)^2 + 0{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}2}{(0{,}2)^2 + (0{,}06)^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}2} \approx \frac{0{,}0096}{0{,}0556} \approx 0{,}173$$

$$x_{2opt} = \frac{(0{,}2)^2 + 0{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}2}{(0{,}2)^2 + (0{,}06)^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}2} \approx \frac{0{,}046}{0{,}0556} \approx 0{,}827.$$

Определим минимальное значение риска портфеля ценных бумаг и его эффективность:

$$\sigma_{\mu n} = [(0{,}173)^2 (0{,}2)^2 + (0{,}827)^2 (0{,}06)^2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}173 \cdot 0{,}827 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}06]^{1/2} =$$

$$= [0{,}001942]^{1/2} \approx 0{,}044$$

$$m_{\mu n} = 0{,}173 \cdot 0{,}16 + 0{,}827 \cdot 0{,}08 \approx 0{,}94.$$

Определим значение дискриминанта D:

$$D = \frac{(0{,}055)^2[(0{,}2)^2 + (0{,}06)^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}06] - (0{,}2 \cdot 0{,}06)^2 (1 - 0{,}5)^2}{[(0{,}2)^2 + (0{,}06)^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}06]^2} =$$

$$= \frac{0{,}00006019}{0{,}00309136} = 0{,}01947; \quad \sqrt{D} \approx 0{,}14.$$

По формулам (4.36) и (4.37) определяем границы интервалов возможных значений ценовых долей бумаг:

$$x_1^{(1)} = 0{,}173 + 0{,}14 = 0{,}313$$
$$x_2^{(1)} = 0{,}827 - 0{,}14 = 0{,}687$$
$$x_1^{(2)} = 0{,}173 - 0{,}14 = 0{,}033$$
$$x_2^{(2)} = 0{,}827 + 0{,}14 = 0{,}967.$$

Определим риск и эффективность портфеля ценных бумаг при $x_1 = 0{,}313$ и $x_2 = 0{,}687$:

$$\sigma_{\mu п} = [(0{,}313)^2 (0{,}2)^2 + (0{,}687)^2 (0{,}06)^2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}313 \cdot 0{,}687 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}06]^{1/2} =$$
$$= [0{,}003037]^{1/2} \approx 0{,}055$$
$$m_{\mu п} = 0{,}313 \cdot 0{,}16 + 0{,}687 \cdot 0{,}08 \approx 0{,}105.$$

При ценовых долях бумаг $x_1 = 0{,}033$ и $x_2 = 0{,}967$ для риска и эффективности портфеля ценных бумаг получим значения:

$$\sigma_{\mu п} \approx 0{,}055$$
$$m_{\mu п} \approx 0{,}083.$$

Из приведенных расчетов следует, что портфель максимальной эффективности при заданном риске обеспечивается при ценовых долях ценных бумаг, равных $x_1 = 0{,}313$ и $x_2 = 0{,}687$. При этом эффективность портфеля равна $m_{\mu п} = 0{,}105$, а риск, определяемый коэффициентом вариации, будет равен $k_{ВП} = \sigma_{\mu п} / m_{\mu п} = \dfrac{0{,}055}{0{,}105} = 0{,}524.$

Для оптимального портфеля по критерию минимума среднеквадратического отклонения доходности портфеля $\min \sigma_{\mu п}$ при $x_{1opt} = 0{,}173$ и $x_{2opt} = 0{,}827$ эффективность портфеля равна $m_{\mu п_{opt}} = 0{,}94$, а риски, оцениваемые коэффициентом вариации, равны $k_{ВПopt} = \dfrac{0{,}044}{0{,}94} = 0{,}468.$ Таким образом, переход от оптимального по $\min \sigma_{\mu п}$ портфеля к портфелю с максимальной эффективностью увеличивает риски по коэффициенту вариации в $k_{ВП} / k_{ВПopt} = \dfrac{0{,}524}{0{,}468} \approx 1{,}12$ раза. Но эффективность портфеля также возрастает $m_{\mu п} / m_{\mu п_{opt}} = \dfrac{0{,}105}{0{,}094} \approx 1{,}12$ раза.

Контрольные вопросы и задания

1. Виды ценных бумаг.
2. Характеристики ценных бумаг и их классификация.

3. Доходность ценной бумаги. Нарицательная стоимость (номинал) и рыночная стоимость ценной бумаги.

4. Доходность портфеля ценных бумаг.

5. Доходность и риск ценной бумаги в условиях изменения ее рыночной стоимости. Эффективность ценной бумаги и портфеля ценных бумаг. Количественная оценка риска портфеля ценных бумаг.

6. Портфель из двух видов ценных бумаг. Зависимость эффективности $m_{\mu п}$, $k_{ВП}$ от ценовой доли бумаг x_1 при $\rho = 0$.

7. Зависимость показателей риска портфеля из двух видов ценных бумаг $\sigma_{\mu п}$, $k_{ВП}$ от коэффициента корреляции бумаг первого и второго вида.

8. Определить оптимальное распределение ценовых долей бумаг первого и второго вида x_1 и x_2, обеспечивающие минимум среднеквадратического значения рисков $\sigma_{\mu п \min}$ портфеля бумаг двух видов, при следующих значениях их доходностей и рисков $m_{\mu_1} = 0{,}1$; $m_{\mu_2} = 0{,}07$; $\sigma_{\mu_1} = 0{,}15$; $\sigma_{\mu_2} = 0{,}05$; $\rho_{12} = -0{,}3$.

Для вычисленных значений x_1 и x_2 определить эффективность $m_{\mu п}$ и показатель риска $\sigma_{\mu п}$ и $k_{ВП}$ портфеля ценных бумаг.

9. Определить оптимальное распределение ценовых долей бумаг первого и второго вида x_1 и x_2, обеспечивающее минимум коэффициента вариации $k_{ВП \min}$ портфеля бумаг двух видов, при следующих значениях их доходностей и рисков: $m_{\mu_1} = 0{,}1$; $m_{\mu_2} = 0{,}07$; $\sigma_{\mu_1} = 0{,}15$; $\sigma_{\mu_2} = 0{,}05$; $\rho_{12} = -0{,}3$.

Для вычисленных значений x_1 и x_2 определить эффективность $m_{\mu п}$ и показатель риска $\sigma_{\mu п}$ и $k_{ВП}$ портфеля ценных бумаг. Сравнить результаты вычисления $m_{\mu п}$; $\sigma_{\mu п}$ и $k_{ВП}$ в заданиях 8 и 9, сделать выводы.

10. Для портфеля из четырех видов независимых ценных бумаг со средними доходностями $m_{\mu i}$ и рисками $\sigma_{\mu i}$, соответственно равными

$$m_{\mu_1} = 0{,}07; \quad \sigma_{\mu_1} = 0{,}05; \quad m_{\mu_2} = 0{,}1; \quad \sigma_{\mu_2} = 0{,}1;$$
$$m_{\mu_3} = 0{,}15; \quad \sigma_{\mu_3} = 0{,}3; \quad m_{\mu_4} = 0{,}12; \quad \sigma_{\mu_4} = 0{,}2.$$

Найти оптимальную структуру портфеля (x_1; x_2; x_3; x_4) минимального риска. Для оптимальной структуры портфеля определить значения $\sigma_{\mu п \min}$ и $m_{\mu п}$.

11. Определить стоимостные доли x_1 и x_2 портфеля ценных бумаг двух видов, обеспечивающие минимальный риск портфеля при заданной его эффективности $m_{п\,тр} \geq 0{,}115$, если эффективность и риск бумаг первого и второго вида соответственно равны $m_{\mu_1} = 0{,}08$, $\sigma_{\mu_1} = 0{,}1$; $m_{\mu_2} = 0{,}18$,

$\sigma_{\mu_2} = 0{,}15$, при двух значениях коэффициента корреляции ценных бумаг $\rho_{12} = 0$, $\rho_{12} = -0{,}8$.

12. Для портфеля, состоящего из трех видов независимых ценных бумаг, эффективность и риск которых имеют соответственно значения $m_{\mu_1} = 0{,}1$, $\sigma_{\mu_1} = 0{,}08$; $m_{\mu_2} = 0{,}08$, $\sigma_{\mu_2} = 0{,}08$; $m_{\mu_3} = 0{,}05$, $\sigma_{\mu_3} = 0{,}03$, определить структуру портфеля ценных бумаг x_1, x_2, x_3 обеспечивающую минимальный риск портфеля $\sigma_{n\mu_{\min}}$ при его заданной эффективности $m_{\mu_{mp}} = 0{,}07$.

13. Для портфеля, состоящего из двух видов зависимых бумаг со следующими значениями эффективности риска: $m_{\mu_1} = 0{,}1$, $\sigma_{\mu_1} = 0{,}1$; $m_{\mu_2} = 0{,}08$, $\sigma_{\mu_2} = 0{,}05$; $\rho_{12} = -0{,}04$, определить структуру портфеля ценных бумаг максимальной эффективности при заданном риске портфеля $\sigma_{\mu n} \le 0{,}04$.

5. Облигации

5.1. Основные понятия и характеристики доходности облигаций

Облигация – это ценная бумага, обеспечивающая ее обладателю оговоренный доход в связи с предоставлением обладателем облигации ее эмитенту займа на фиксированный, как правило, длительный срок. Облигации являются эмиссионными ценными бумагами, выпускаемыми эмитентом для заимствования денежных средств. Эмитентами облигаций могут быть государство (федеральные или региональные органы исполнительной власти), муниципалитеты, корпорации, финансовые или коммерческие учреждения.

Доход по облигациям обычно ниже, чем доход по другим ценным бумагам, но в то же время он более стабилен, так как облигацией гарантируется выплата ее владельцу определенной суммы денег на дату ее погашения. Эта сумма денег называется номинальной стоимостью, которая обычно указывается на облигации. Кроме номинальной стоимости, облигации характеризуются следующими параметрами:

– дата выпуска облигации t_o;

– время обращения облигации с момента ее выпуска T;

– дата погашения $t_o + T$;

– срок до погашения облигации $t_n = t_o + T - t$, где t – текущая дата;

– номинальная стоимость облигации P_N - это сумма денег, выплачиваемая владельцу облигации на дату погашения. Номинальная стоимость обычно указывается на облигации;

– выкупная стоимость - указывается, если она отличается от номинальной стоимости;

– купонный доход (C) – это постоянные платежи, выплачиваемые владельцу облигации ежегодно по купонной ставке. Купонный доход определяется произведением $C = cP_N$, где c – годовая купонная ставка дохода. Если купонные выплаты не предусмотрены, такую облигацию называют бескупонной.

5.2. Текущая стоимость, текущая доходность и доходность к погашению облигации

Текущая стоимость облигации – это ее стоимость в некоторый текущий момент времени t. Эта стоимость определяется потоком купонных платежей за время t_n и номинальной стоимостью облигации, дисконтированной к текущему моменту времени t. Если срок до погашения облигации t_n кратен одному году (t_n /$T_г$ = n), то текущую стоимость облигации можно определить по формуле:

$$P_t = \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{(1+i)^k} + \frac{P_N}{(1+i)^n}. \tag{5.1}$$

Первое слагаемое в данной формуле есть приведенная к текущему моменту времени t_n стоимость простой годовой ренты с платежами $C = cP_N$. Поэтому формулу (5.1) в соответствии с формулой (2.6) можно записать в виде:

$$P_t = cP_N \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{P_N}{(1+i)^n}. \tag{5.2}$$

Для бескупонной облигации $c = 0$, и текущая стоимость облигации определяется ее дисконтированной номинальной стоимостью:

$$P_t = \frac{P_N}{(1+i)^n}.$$

Для сравнения многих облигаций, имеющихся на рынке ценных бумаг, потенциальный инвестор оценивает облигации по различным показателям доходности. В качестве таких показателей доходности используются средний срок поступления дохода, дюрация облигации, выпуклость облигации. Основными показателями, которые будут рассмотрены в данном параграфе, является текущая доходность и доходность к погашению.

После выпуска облигации поступают на рынок ценных бумаг, где они свободно продаются и покупаются. Если облигация продается по номинальной стоимости P_N, то единственным измерителем ее доходности является купонная процентная ставка. При продаже облигаций по рыночной цене V, которая не совпадает с текущей стоимостью P_t, рассчитанной по формуле (5.2), для характеристики текущей стоимости облигации используется понятие *текущего курса облигации* K.

$$K = \frac{V}{P_N} \cdot 100\%. \tag{5.3}$$

Текущая доходность облигации "p" определяется отношением купонных выплат C к рыночной цене V облигации:

$$p = \frac{C}{V} = \frac{cP_N}{V} = \frac{c}{K}. \tag{5.4}$$

Если купонные выплаты производятся r раз в году по ставке c/r, то и в этом случае текущая доходность облигации определяется формулой (5.4). Из формулы (5.4) следует, что если рыночная цена, по которой продана облигация, меньше ее номинальной стоимости $(V < P_N;\ K < 1)$, текущая доходность облигации больше купонной ставки $(p > c)$. Если курс облигации на момент покупки больше единицы $(V > P_N)$, текущая доходность облигации будет меньше купонной ставки $(p < c)$.

Если купонные выплаты по облигации непостоянны, т. е. изменяются во времени и известны величины годовой купонной ставки "c_j" при $j = 1 \div n$, можно определить среднюю текущую доходность облигации.

$$p_{cp} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{P_N}{V}. \tag{5.5}$$

Текущая доходность, определяемая по формуле (5.4), имеет существенный недостаток, так как не учитывает часть дохода, определяемую вторым слагаемым в формуле (5.2) и характеризующую изменение стоимости облигации к концу срока ее реализации. При этом облигации с нулевым купонным доходом (бескупонные) будут иметь нулевую текущую доходность, определяемую по формуле (5.4).

Более информативной является оценка доходности облигации к погашению, обозначаемой "p". Когда текущая стоимость облигации P_t не совпадает с рыночной стоимостью V, эта рыночная стоимость может быть определена по формуле (5.2) при замене годовой процентной ставки "i" на доходность облигации к погашению ρ.

$$V = cP_N \frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + P_N (1+\rho)^{-n}. \tag{5.6}$$

Поделив обе части этого уравнения на номинальную стоимость облигации P_N, получим аналогичную формулу для текущего курса облигации

$$K = c\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + (1+\rho)^{-n}. \tag{5.7}$$

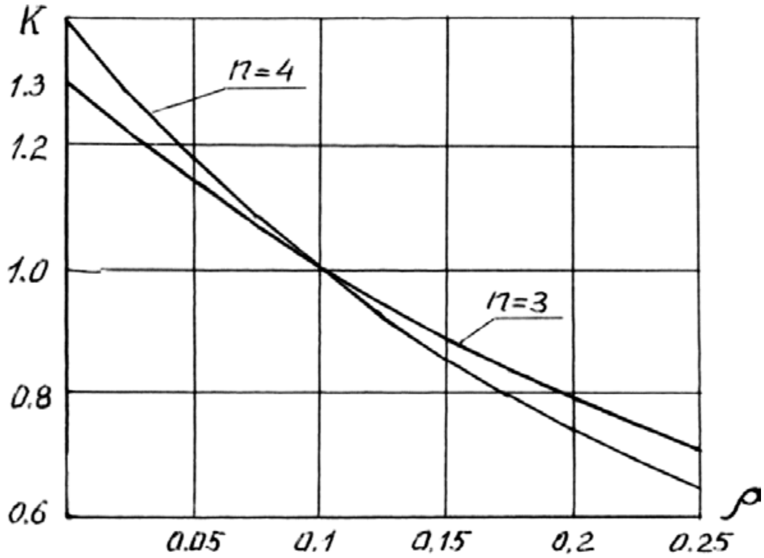

Рис. 5.1. График зависимости текущего обменного курса облигации при купонной ставке *c* = 0,1 и сроке погашения 3 и 4 года

При известной рыночной цене облигации или текущем обменном курсе можно найти доходность облигации к погашению ρ. На рис. 5.1 приведен график зависимости текущего обменного курса облигации при купонной ставке $c = 0{,}1$ и сроке до погашения "n", равном 3 и 4 года.

Из приведенного графика и формулы (5.7) видно, что при текущем обменном курсе облигации $K = cn + 1$ ее доходность к погашению будет равна нулю, при $K = 1$ доходность облигации к погашению будет равна годовой купонной ставке $\rho = c$.

Из графиков, приведенных на рис. 5.1, следует:

– если рыночная цена облигации больше ее номинальной стоимости $(K > 1)$, то доходность облигации к погашению меньше купонной ставки;

– если рыночная цена облигации меньше номинальной стоимости облигации, то доходность облигации к погашению больше купонной ставки.

Из сравнения графиков при разных сроках до погашения облигации можно сделать следующий вывод.

При одинаковых текущих курсах облигаций с разными сроками до погашения и при $K > 1$ бо́льшую доходность к погашению имеют облигации с бо́льшим сроком до погашения, а при $K < 1$ бо́льшую доходность к погашению имеют облигации с меньшим сроком погашения.

5.3. Средний срок поступления дохода

Средний срок поступления дохода – это среднее взвешенное значение сроков поступления всех видов платежей, где в качестве весов берутся суммы платежей. Средний срок поступления дохода по облигации определяется аналогично среднему сроку финансового потока:

$$t_{cp} = \frac{\sum_{i=0}^{n} t_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} P_i}, \qquad (5.8)$$

где P_i - размер i-го платежа;

t_i – срок i-го платежа, определяется временем, прошедшим от начала финансового потока до момента i-го платежа.

Финансовый поток выплат по облигации номинальной стоимостью P_N с купонной ставкой "c" можно представить на рис. 5.2.

В соответствии с формулой (5.8) и рис. 5.2 для среднего срока поступления дохода по облигации получим:

$$t_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i c P_N + t_n P_N}{n c P_N + P_N} \qquad (5.9)$$

$$t_{cp} = \frac{c\sum_{i=1}^{n} t_i + t_n}{nc + 1}.$$

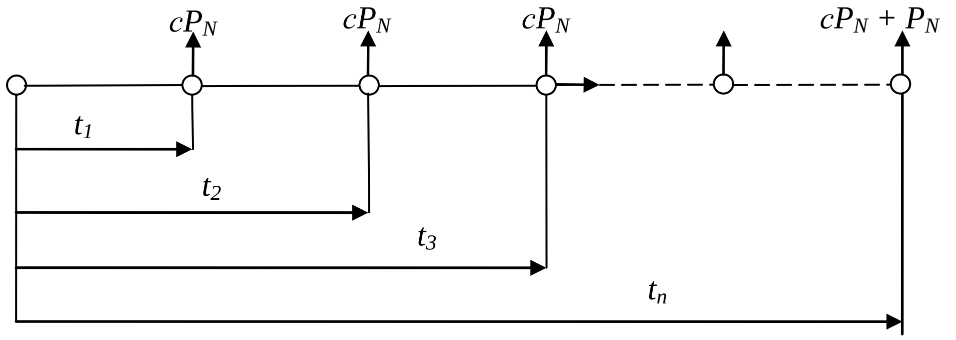

Рис. 5.2. Финансовый поток выплат по облигации номинальной стоимостью P_N с купонной ставкой "*c*"

Если купонные выплаты осуществляются один раз в конце каждого года, тогда сроки *i*-х платежей будут кратны одному году

$$t_i\Big|_{i=1}^{n} = 1;2;3;...;n.$$

В этом случае $\sum_{i=1}^{n} t_i$ является суммой членов единичной арифметической прогрессии $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. С учетом этого для среднего срока поступления дохода по облигации можно записать:

$$t_{cp} = \frac{cn(n+1) + 2n}{2(nc+1)}. \qquad (5.10)$$

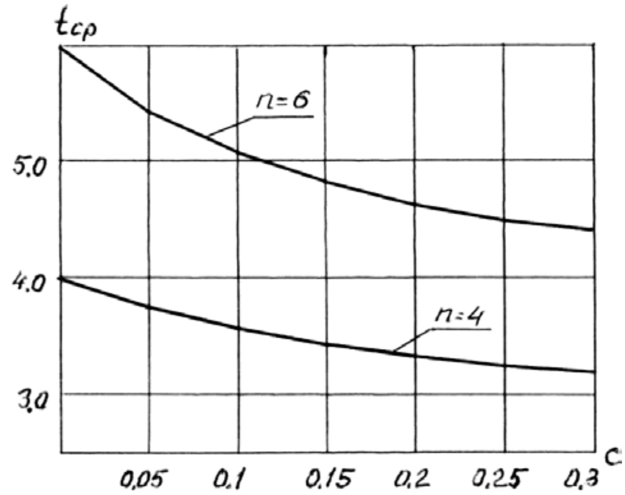

Рис. 5.3. Графики зависимости среднего срока поступления дохода от размера купонной ставки *n* = 4 и *n* = 6

Из формулы (5.10) видно, что средний срок поступления дохода не зависит от номинальной стоимости облигации и полностью определяется купонной ставкой и сроком до погашения облигации (n лет).

На рис. 5.3 приведены графики зависимости среднего срока поступления дохода от размера купонной ставки при n = 4 и n = 6. Из графиков видно, что увеличение купонной ставки приводит к уменьшению среднего срока поступления дохода.

Рассмотрим случай, когда купонные платежи выплачиваются r раз в году по ставке c/r. В этом случае поток выплат по облигации можно представить в виде:

$$CF = \left\{(0;0), \left(\frac{1}{r}; \frac{cP_N}{r}\right), \left(\frac{2}{r}; \frac{cP_N}{r}\right), \ldots, \left(\frac{nr}{r}; \frac{cP_N}{r} + P_N\right)\right\}.$$

Для данного финансового потока формула (5.9) может быть записана в виде:

$$t_{cp} = \frac{\frac{c}{r}\sum_{i=1}^{nr} t_i}{nc+1}, \qquad (5.11)$$

где $\sum_{i=1}^{nr} t_i = \frac{1}{r}\frac{nr(nr+1)}{2} = \frac{n(nr+1)}{2}$ - сумма членов арифметической прогрессии $\frac{1}{r} + \frac{2}{r} + \frac{3}{r} + \ldots + \frac{nr}{r}$.

Окончательно формулу для среднего срока поступления дохода по облигациям с r-кратной в году выплатой купонного дохода можно записать в виде:

$$t_{cp} = \frac{cn(n+1/r)+2n}{2nc+1}. \qquad (5.12)$$

Если срок до погашения облигации меньше одного года, например, $\frac{t_n}{T_г} = \frac{k}{r}$, где $k < r$, формула (5.11) будет иметь вид:

$$t_{cp} = \frac{\frac{c}{r}\sum_{i=1}^{k} t_i + \frac{k}{r}}{\frac{k}{r}c+1} = \frac{c\frac{k+1}{r}+1}{2\left(c+\frac{r}{k}\right)}. \qquad (5.13)$$

На рис. 5.4 приведены графики зависимости среднего срока поступления дохода в зависимости от кратности выплаты купонного дохода, рассчитанные по формуле (5.12) для годовой купонной ставки c = 0,1 и сроках до погашения облигации n = 4 и n = 6 лет. Из приведенных графиков видно, что увеличение кратности выплаты купонного дохода приводит к уменьшению среднего срока поступления дохода.

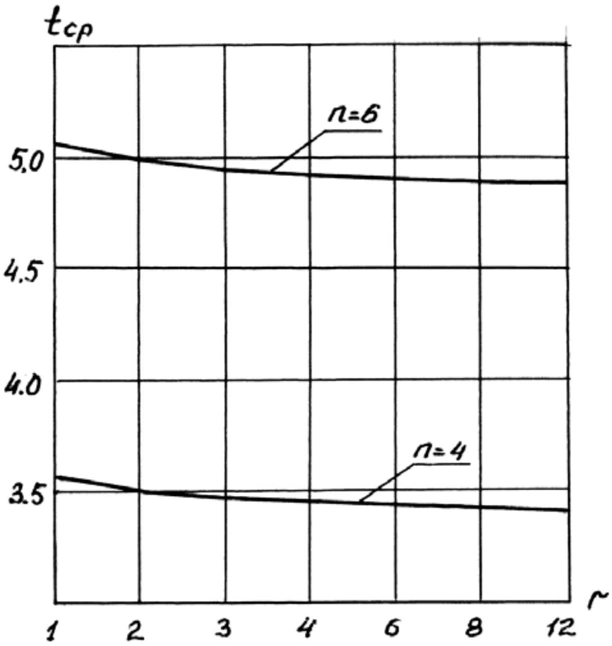

Рис. 5.4. Графики зависимости среднего срока поступления дохода от кратности выплаты купонного дохода

На рис. 5.5 приведены графики зависимости среднего срока поступлении дохода в зависимости от размера годовой купонной ставки, рассчитанные по формуле (5.13) при значениях $\frac{k}{r}=\frac{9}{12}$ и $\frac{k}{r}=\frac{6}{12}$. Из графиков видно, что увеличение годовой купонной ставки приводит к уменьшению среднего срока поступления дохода.

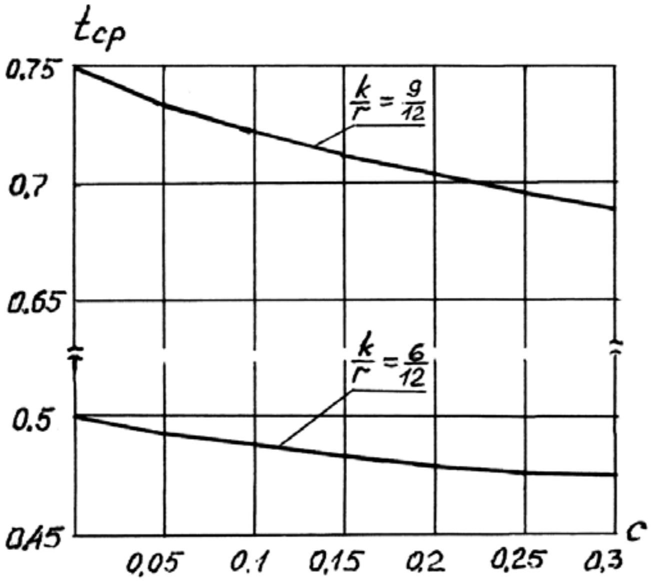

Рис. 5.5. Графики зависимости среднего срока поступления дохода от размера годовой купонной ставки

5.4. Дюрация облигации

Рассмотрим вначале произвольный поток платежей:

$$CF = \{(t_0;0),(t_1;R_1),(t_2;R_2),...,(t_n;R_n)\}.$$

Для текущей стоимости потока (в момент времени t_0) относительно некоторой ставки доходности "y" можно записать:

$$P(y) = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}.$$

Продифференцируем данную функцию по "y":

$$\frac{dP(y)}{dy} = P'(y) = -\sum_{k=1}^{n} t_k P_k (1+y)^{-t_k-1} = -\frac{1}{1+y}\sum_{k=1}^{n} t_k P_k (1+y)^{-t_k}. \quad (5.14)$$

Разделим обе части равенства (5.14) на $P(y)$ и получим:

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = -\frac{1}{1+y}\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k P_k (1+y)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} P_k (1+y)^{-t_k}}. \quad (5.15)$$

Если ввести понятие весовых коэффициентов:

$$\omega_k = \frac{P_k (1+y)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} P_k (1+y)^{-t_k}}, \quad (5.16)$$

то формулу (5.15) можно записать в виде:

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = \frac{-1}{1+y}\sum_{k=1}^{n} \omega_k t_k. \quad (5.17)$$

Сомножитель $\sum_{k=1}^{n} \omega_k t_k$ аналогичен формуле (5.8) для среднего срока поступления дохода. Отличие состоит в том, что в данном случае весовые коэффициенты определяются по размерам платежей, дисконтированным к моменту времени t_0.

Этот сомножитель называется *дюрацией* потока платежей D:

$$D = \sum_{k=1}^{n} \omega_k t_k, \quad (5.18)$$

где ω_k определяется формулой (5.16).

Дюрация определяет средний срок поступления дохода с учетом временнóй стоимости денег, так как платежи дисконтируются к моменту времени t_0. В этом состоит преимущество данной характеристики финансового потока перед средним сроком поступления дохода.

Пример 5.1. Найти средний срок поступления дохода $t_{ср}$ и дюрацию финансового потока:

$CF = \{(0;0),(1;200),(2;150),(3;400),(4;300)\}$ при ставке доходности y = 12 %.

Решение: Для среднего времени поступления дохода по формуле (5.8) получим:

$$t_{cp} = \frac{1\cdot 200 + 2\cdot 150 + 3\cdot 400 + 4\cdot 300}{200 + 150 + 400 + 300} = 2{,}762.$$

Для определения дюрации вычислим вначале дисконтированные размеры платежей:

$$P_1(1+y)^{-1} = 200\cdot 1{,}12^{-1} = 178{,}57$$

$$P_2(1+y)^{-2} = 150\cdot 1{,}12^{-2} = 119{,}58$$

$$P_3(1+y)^{-3} = 400\cdot 1{,}12^{-3} = 284{,}72$$

$$P_4(1+y)^{-4} = 300\cdot 1{,}12^{-4} = 190{,}65$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_k(1+y)^{-k} = 178{,}57 + 119{,}58 + 284{,}72 + 190{,}65 = 773{,}52.$$

По формуле (5.16) вычислим весовые коэффициенты ω_k:

$$\omega_1 = \frac{178{,}57}{773{,}52} = 0{,}231; \qquad \omega_2 = \frac{119{,}58}{773{,}52} = 0{,}155;$$

$$\omega_3 = \frac{284{,}72}{773{,}52} = 0{,}368; \qquad \omega_4 = \frac{190{,}65}{773{,}52} = 0{,}246.$$

Сумма весовых коэффициентов должна быть равна единице:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 0{,}231 + 0{,}155 + 0{,}368 + 0{,}246 = 1.$$

Теперь по формуле (5.18) можем вычислить значение дюрации финансового потока:

$$D = \sum_{k=1}^{n} \omega_k t_k = 1\cdot 0{,}231 + 2\cdot 0{,}155 + 3\cdot 0{,}368 + 4\cdot 0{,}246 = 2{,}629.$$

Из сравнения полученных результатов видно, что дюрация финансового потока меньше, чем средний срок поступления дохода.

Из формул (5.17) и (5.18) можно получить соотношение:

$$D = -\frac{P'(y)}{P(y)}(1+y). \tag{5.19}$$

Эта формула позволяет определить дюрацию облигаций.

Для облигации с выплатой купонного дохода по купонной ставке "c" номинальной стоимостью P_N при доходности облигации к погашению ρ ее текущая рыночная стоимость V определяется формулой (5.6).

Определим производную рыночной стоимости облигации по доходности к погашению:

$$\frac{dV}{d\rho} = V'(\rho) = P_N\left[c\,\frac{n(1+\rho)^{-n-1}\rho - 1 + (1+\rho)^{-n}}{\rho^2} - n(1+\rho)^{-n-1}\right].$$

Вынесем общий множитель $-(1+\rho)^{-1}$ за квадратные скобки и получим:

$$-V'(\rho)(1+\rho) = P_N\left[n((1+\rho)^{-n} - c\frac{n\rho(1+\rho)^{-n} + (1+\rho)[(1+\rho)^{-n} - 1]}{\rho^2}\right].$$

По аналогии с формулой (5.19) дюрацию облигации можно определить отношением:

$$D = -\frac{V'(\rho)}{V}(1+\rho), \tag{5.20}$$

где рыночная стоимость облигации V определяется формулой (5.6):

$$D = -\frac{\rho^2 n(1+\rho)^{-n} - cn\rho(1+\rho)^{-n} + c(1+\rho)[(1+\rho)^{-n} - 1]}{\rho c[1-(1+\rho)^{-n}] + \rho^2(1+\rho)^{-n}}.$$

После несложных, но громоздких преобразований для дюрации облигаций получим:

$$D = \frac{1+\rho}{\rho} - \frac{n(c-\rho) + 1 + \rho}{c[(1+\rho)^n - 1] + \rho}. \tag{5.21}$$

1) Из формулы (5.21) видно, что для бескупонной облигации ($c = 0$) ее дюрация равна сроку до погашения облигации $D = n$.

2) Из формулы (5.20) видно, что относительные изменения рыночной цены облигации можно определить по приближенной формуле:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+\rho}\Delta\rho, \tag{5.22}$$

где $\Delta\rho$ - изменения доходности облигации к погашению.

3) Если облигация продается по номинальной стоимости $(V = P_N,\ K = 1)$, доходность к погашению равна купонной ставке и дюрация облигации определяется формулой:

$$D = \frac{1+\rho}{\rho}[1-(1+\rho)^{-n}].$$

Определим зависимость дюрации облигации от ее параметров. На рис. 5.6 приведены графики зависимости дюрации облигаций от величины купонной ставки "c", рассчитанные по формуле (5.21) для двух значений срока до погашения облигации $n = 4$, $n = 6$ и для двух значений доходности к погашению $\rho = 0{,}1$ и $\rho = 0{,}3$.

Из приведенных графиков видно, что увеличение купонной ставки и увеличение доходности облигации к погашению приводит к уменьшению дюрации.

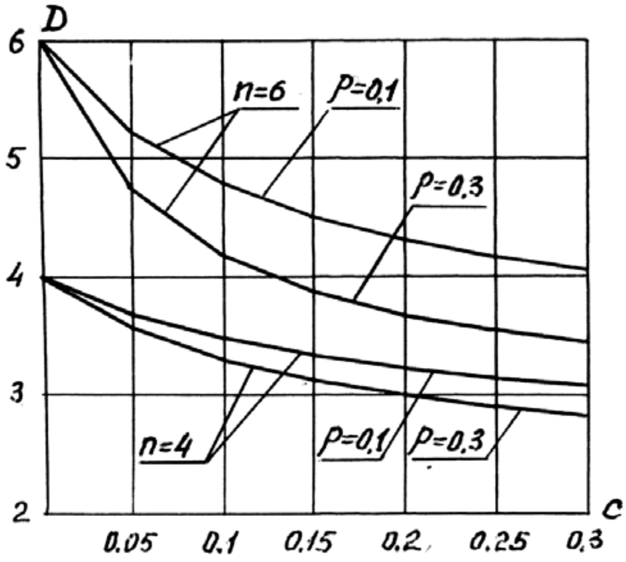

Рис. 5.6. Графики зависимости дюрации облигаций от величины купонной ставки "*c*"

На рис. 5.7 приведены графики зависимости дюрации облигаций от срока до их погашения "*n*" при различных значениях доходности к погашению "*ρ*" и купонной ставки доходности "*c*". Кривая 1 рассчитана для значений $\rho = 0{,}1$ и c = 0,2. Кривая 2 рассчитана для значений $\rho = 0{,}2$ и c = 0,1. Из формулы (5.21) и проведенных расчетов видно, что при увеличении срока до погашения облигации $n \to \infty$ второе слагаемое в формуле (5.21) стремится к нулю, и дюрация облигации приближается к значению $\frac{1+\rho}{\rho}$.

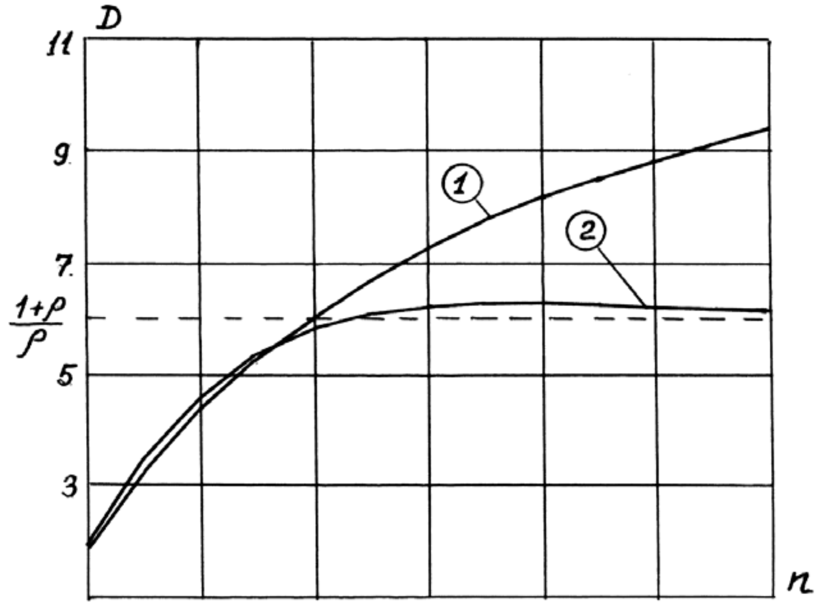

Рис. 5.7. Графики зависимости дюрации облигаций от срока до их погашения "*n*"

При $c<\rho$ график зависимости дюрации при увеличении "n" вначале пересекает асимптоту, а затем асимптотически сверху приближается к ее значению. График зависимости дюрации $D(n)$ пересекает асимптоту в точке, когда второе слагаемое в формуле (5.21) равно нулю, т. е. при $n=\dfrac{1+\rho}{\rho-c}$.

Таким образом, график зависимости $D(n)$ при $c<\rho$ имеет максимум, который может быть найден из условия равенства нулю производной $dD(n)/dn=0$. Приближенное значение "n_o", при котором дюрация имеет максимальное значение при условии:

$$\frac{c-\rho^2}{(1+\rho)^m}\approx 0,$$

может быть записано в виде:

$$n_o=\frac{1+\rho}{\rho-c}+\frac{1}{\ln(1+\rho)}.$$

При $c=0{,}1$ и $\rho=0{,}2$ дюрация имеет максимальное значение при $n_o\approx 17{,}48$.

5.5. Выпуклость облигации

Понятие выпуклости облигаций вводят в соответствии с понятием выпуклости графика зависимости рыночной стоимости облигации V от ее доходности к погашению ρ – формула (5.6) и рис. 5.1

График функции $V(\rho)$ является выпуклым вниз на некотором интервале, если вторая производная $V''(\rho)>0$ положительна.

Выпуклость облигации определяют по формуле:

$$w(\rho)=\frac{V''(\rho)}{V(\rho)}(1+\rho)^2. \qquad (5.23)$$

При вычислении второй производной удобнее воспользоваться формулой для $V(\rho)$, аналогичной формуле (5.1):

$$V(\rho)=P_N\left[c\sum_{k=1}^{n}(1+\rho)^{-k}+(1+\rho)^{-n}\right]. \qquad (5.24)$$

После вычисления второй производной с учетом формулы (5.3) получим:

$$w(\rho)=\frac{c}{K}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(1+\rho)^{-k}+\frac{n(n+1)}{K}(1+\rho)^{-n}, \qquad (5.25)$$

где c – купонная ставка облигации;

$K=\dfrac{V}{P_N}$ - курс облигации.

Проведем определение выпуклости облигаций на примере двух облигаций: бескупонной облигации номинальной стоимостью $P_{N_1} = 4169$ руб. и сроком до погашения $n_1 = 4{,}28$ лет и облигации номинальной стоимостью $P_{N_2} = 3000$ руб. с купонной ставкой "c_2"$= 0{,}08$ и сроком до погашения $n_2 = 5$ лет.

В табл. 5.1 приведены результаты расчетов рыночной стоимости облигаций по формуле (5.24) для бескупонной облигации $V_1(\rho)$ при "c_1"$= 0$ и для второй облигации $V_2(\rho)$ при различных значениях доходности к погашению.

Таблица 5.1

Зависимость рыночной стоимости облигаций от доходности к погашению

ρ	0,04	0,06	0,1	0,14	0,16
$V_1(\rho)$	3524,7	3248,8	2772	2379,5	2208,8
$V_2(\rho)$	3534,2	3252,7	2772	2382,0	2214,2
ΔV_{12}	9,5	3,9	0	2,5	5,4

Из приведенных расчетов видно, что при $\rho = 0{,}1$ рыночная стоимость обеих облигаций одинакова. Кроме того, дюрации этих облигаций также имеют одинаковые значения:

$$D_1 = D_2 = 4{,}28.$$

Из таблицы также видно, что при изменении доходности к погашению как в меньшую $\rho < 0{,}1$, так и в большую сторону $\rho > 0{,}1$ рыночная стоимость второй облигации оказывается больше, чем первой $V_2(\rho) \geq V_1(\rho)$. В последней строке табл. 5.1 приведены значения разности $\Delta V_{12} = V_2(\rho) - V_1(\rho)$. Из приведенных результатов следует, что вторая облигация является более выпуклой. Результаты расчетов выпуклости облигаций по формуле (5.25) дают следующие результаты:

$$w_1(\rho = 0{,}1) = 22{,}98; \quad w_2(\rho = 0{,}1) = 24{,}32;$$

$$w_1(\rho) < w_2(\rho).$$

Из приведенных расчетов следует, что вторая облигация (с купонной ставкой) оказывается предпочтительнее первой бескупонной облигации, так как при колебаниях доходности к погашению всегда выполняется соотношение $V_2(\rho) \geq V_1(\rho)$.

Введение понятия выпуклости облигации позволяет уточнить формулу (5.22). Более точно относительное изменение рыночной цены облигации при изменении доходности к погашению можно определить по формуле:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{D}{1+\rho}\Delta\rho + \frac{1}{2} w \cdot \Delta\rho^2. \qquad (5.26)$$

Данная формула получается при разложении зависимости $V(\rho)$ в ряд Тейлора с точностью до члена второго порядка малости $(\Delta\rho)^2$.

5.6. Доходность портфеля облигаций

При определении доходности портфеля облигаций исходят из суммы приведенных к некоторому моменту времени t_o потоков доходов от каждой входящей в портфель облигации. Предположим, что в портфель входит "M" облигаций различных видов $m = 1 \div M$, при числе облигаций каждого вида, равном q_m. Облигации каждого вида имеют номинальную стоимость P_{Nm}, срок до погашения облигаций N_m и купонные ставки c_m. При такой постановке задачи суммарную рыночную стоимость портфеля облигаций можно определить по формуле:

$$V_\Sigma = \sum_{m=1}^{M} q_m V_m, \tag{5.27}$$

где V_m - рыночная стоимость облигации m-го вида, рассчитываемая по формуле:

$$\begin{aligned} V_m &= \sum_{k=1}^{N_{\max}} \frac{c_m P_{Nm}}{(1+\rho_m)^k} + \frac{P_{Nm}}{(1+\rho_m)^{P_m}} = \\ &= P_{Nm}\left[c_m \frac{1-(1+\rho_m)^{-Nm}}{\rho_m} + (1+\rho_m)^{Nm} \right]. \end{aligned} \tag{5.28}$$

С другой стороны, портфель облигаций создает поток доходов, который можно характеризовать следующими параметрами: S_i – суммарный доход от облигаций всех видов, поступающий в момент времени $t = t_i$, и ρ_Σ - доходность портфеля облигаций. Приведенную стоимость данного потока платежей можно определить по формуле, аналогичной формуле (2.2):

$$PV_o = \sum_{i=1}^{N_{\max}} \frac{S_i}{(1+\rho_\Sigma)^i}, \tag{5.29}$$

где $N_{\max}$ – максимальный срок выплаты дохода по всем облигациям портфеля.

Доходность портфеля облигаций ρ_Σ можно определить при условии $V_\Sigma = PV_o$, т. е. из решения уравнения:

$$\sum_{i=1}^{N_{\max}} \frac{S_i}{(1+\rho_\Sigma)^i} = \sum_{m=1}^{M} q_m V_m. \tag{5.30}$$

Значение доходности портфеля облигаций ρ_Σ может быть найдено решением уравнения (5.30) итерационными методами или на основе метода линейной интерполяции между минимальным $\rho_{\min}$ и максимальным $\rho_{\max}$ значениями доходности портфеля, ограничивающими интервал, в пределах которого находится искомое значение доходности портфеля облигаций ρ_{Σ}. При использовании метода линейной интерполяции доходность портфеля может быть определена по формуле:

$$\rho_{\Sigma} = \rho_{\min} + \frac{PV(\rho_{\min}) - V_{\Sigma}}{PV(\rho_{\min}) - PV(\rho_{\max})}(\rho_{\max} - \rho_{\min}), \qquad (5.31)$$

где V_{Σ} - рыночная стоимость портфеля облигаций, определяемая по формулам (5.27) и (5.28);

$PV(\rho_{\min})$ и $PV(\rho_{\max})$ - приведенные стоимости потока платежей, определяемые по формуле (5.29) при применении в расчетах ставок доходности $\rho_{\min}$ и $\rho_{\max}$ соответственно.

Рассмотрим методику вычисления доходности на примере портфеля, состоящего из двух видов облигаций.

Пример 5.2. Портфель облигаций состоит из двух видов облигаций со следующими характеристиками:

– первая облигация $P_{N_1} = 4000$ руб.; $C_1 = 0{,}08$, $\rho_1 = 0{,}12$, $n_1 = 3$ года;

– вторая облигация $P_{N_2} = 3000$ руб.; $C_2 = 0{,}05$, $\rho_2 = 0{,}2$, $n_2 = 4$ года.

Определить доходность портфеля облигаций, если число облигаций первого и второго вида одинаково $q_1 = q_2 = q$.

Решение: Определим рыночную стоимость облигации первого вида по формуле (5.28):

$$V_1 = 4000\left[0{,}08\frac{1-(1{,}12)^{-3}}{0{,}12} + (1{,}12)^{-3}\right] = 3615{,}7 \text{ руб.}$$

Аналогично определяем рыночную стоимость облигации второго вида:

$$V_2 = 3000\left[0{,}05\frac{1-(1{,}2)^{-3}}{0{,}2} + (1{,}2)^{-4}\right] = 1835{,}1 \text{ руб.}$$

Суммарная рыночная стоимость портфеля облигаций в соответствии с формулой (5.27) составит:

$$V_{\Sigma} = q(V_1 + V_2) = q(3615{,}7 + 1835{,}1) = q5450{,}8 \text{ руб.}$$

Вычислим суммарный поток платежей S_i по облигациям первого и второго вида. В табл. 5.2 приведены размеры платежей по облигациям первого и второго вида и суммарный поток S_i.

Таблица 5.2

Вычисление суммарного потока платежей по двум облигациям, руб.

Номер платежа	1	2	3	4
Облигации первого вида	q320	q320	q4320	-
Облигации второго вида	q150	q150	q150	q3150
Суммарный поток платежей S_i	q470	q470	q4470	q3150

Так как количество облигаций первого и второго вида одинаково, то уравнение (5.30) можно записать в виде:

$$PV(\rho) = \sum_{i=1}^{4} \frac{S_i}{(1+\rho_\Sigma)^i} = \sum_{m=1}^{2} V_m = V_\Sigma. \tag{5.32}$$

Вычислим приведенную стоимость суммарного потока платежей при различных значениях ρ_Σ:

$$PV(\rho_\Sigma) = \frac{370}{(1+\rho_\Sigma)} + \frac{370}{(1+\rho_\Sigma)^2} + \frac{4370}{(1+\rho_\Sigma)^3} + \frac{3150}{(1+\rho_\Sigma)^4}.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Результаты расчета приведенной стоимости суммарного потока

ρ	0,14	0,15	0,15361	0,16	0,17
$PV(\rho)$	5656,11	5504,2	5450,76	5457,92	5216,98

Из табл. 5.3 видно, что равенство $PV(\rho) = V_\Sigma$ выполняется при $\rho_\Sigma \approx 0{,}15361$, т. е. этим значением определяется доходность портфеля рассматриваемых облигаций. Вычислим значение ρ_Σ по формуле (5.31). Границы интервала, в котором находится ρ_Σ, зададим следующими значениями: $\rho_{\min} = 0{,}14$; $\rho_{\max} = 0{,}17$. После подстановки соответствующих численных значений в формулу (5.31) получим:

$$\rho_\Sigma = 0{,}14 + \frac{5656{,}11 - 5450{,}8}{5656{,}11 - 5216{,}98} \cdot 0{,}03 = 0{,}154.$$

На рис. 5.8 приведен график зависимости $PV(\rho)$ и показана графическая иллюстрация определения ρ_Σ по уравнению (5.32) и по формуле (5.31).

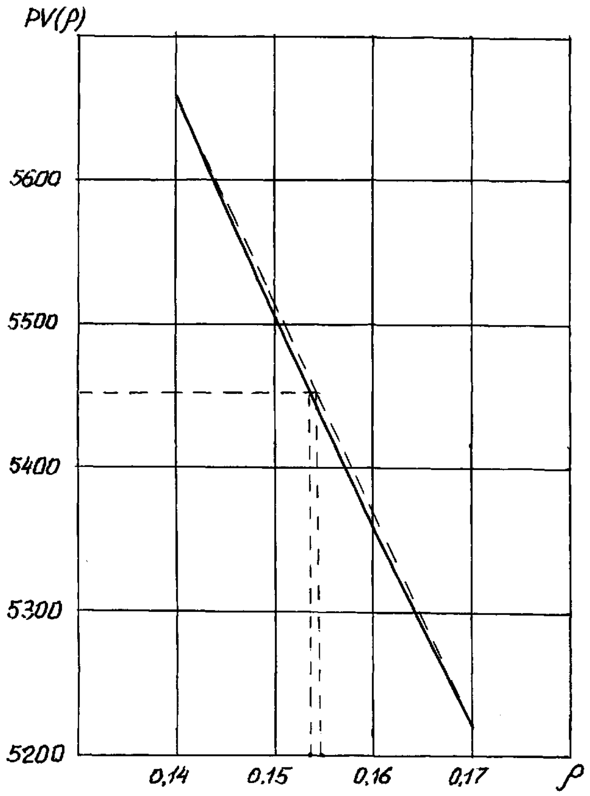

Рис. 5.8. График зависимости $PV(\rho)$ от доходности облигаций к погашению

5.7. Средний срок поступления дохода портфеля облигаций

Средний срок поступления дохода портфеля облигаций t_{ncp} находится как средняя взвешенная величина сроков поступления доходов при использовании в качестве весов недисконтированных величин доходов. Для портфеля, состоящего из M видов облигаций, формулу для среднего срока поступления дохода можно записать в виде:

$$t_{ncp} = \frac{\sum_{m=1}^{M} q_m \left[\sum_{i=1}^{n_m} t_i c_m P_{Nm} + t_{nm} P_{Nm} \right]}{\sum_{m=1}^{M} q_m [n_m c_m P_{Nm} + P_{Nm}]}, \qquad (5.33)$$

где q_m - количество облигаций m-го вида;

P_{Nm} и c_m - соответственно номинальная стоимость и купонная ставка облигаций вида "m";

n_m - срок до погашения облигации m-го вида;

t_i - i-й срок поступления дохода портфеля облигаций, $i = 1 \div n_{\max}$;

$n_{\max}$ - максимальный срок до погашения облигаций, входящих в портфель.

Для портфеля, состоящего из двух видов облигаций $M = 2$, формула (5.33) упрощается:

$$t_{ncp} = \frac{q_1\left[\sum_{i=1}^{n_1} t_i c_1 + t_{n_1}\right]P_{N_1} + q_2\left[\sum_{i=1}^{n_2} t_i c_2 + t_{n_2}\right]P_{N_2}}{q_1[n_i c_1 + 1)P_{N_1}] + q_2[n_i c_2 + 1)P_{N_2}]}. \qquad (5.34)$$

Преобразуем первое и второе слагаемые числителя данной дроби и получим:

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n_1} t_i c_1 + t_{n_1}\right]}{n_i c_1 + 1} q_1 P_{N_1}(n_1 c_1 + 1) = t_{1cp} q_1 (n_1 c_1 + 1) P_{N_1}, \qquad (5.35)$$

где t_{1cp} - средний срок поступления дохода по облигациям первого вида, определяющийся дробью в левой части равенства (5.35):

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_2} t_i c_2 + t_{n_2}}{n_2 c_2 + 1} q_2 P_{N_2}(n_i c_2 + 1) = t_{2cp} q_2 (n_i c_2 + 1) P_{N_2}, \qquad (5.36)$$

где t_{2cp} - средний срок поступления дохода по облигациям второго вида.

С учетом формул (5.35) и (5.36) формулу (5.34) для среднего срока поступления дохода портфеля облигаций при $M = 2$ можно записать:

$$t_{\Pi cp} = \frac{\sum_{m=1}^{M} t_{mcp} q_m (n_m c_m + 1) P_{N_m}}{\sum_{m=1}^{M} q_m (n_m c_m + 1) P_{N_m}}. \qquad (5.37)$$

Рассчитаем средний срок поступления дохода для портфеля облигаций, рассматриваемого в примере 5.2.

По формуле (5.10) рассчитаем средний срок поступления дохода для облигаций первого и второго вида:

$$t_{1cp} = \frac{0{,}08 \cdot 3(3+1) + 2 \cdot 3}{2(3 \cdot 0{,}08 + 1)} \approx 2{,}806 \text{ года.}$$

$$t_{2cp} = \frac{0{,}05 \cdot 4(4+1) + 2 \cdot 4}{2(4 \cdot 0{,}05 + 1)} \approx 3{,}75 \text{ года.}$$

По формуле (5.37) рассчитываем средний срок поступления дохода от портфеля облигаций:

$$t_{\Pi cp} = \frac{2{,}806(3 \cdot 0{,}08 + 1)4000 + 3{,}75(4 \cdot 0{,}05 + 1)3000}{(3 \cdot 0{,}08 + 1)4000 + (4 \cdot 0{,}05 + 1)} 3000 \approx 3{,}203 \text{ года.}$$

5.8. Дюрация и выпуклость портфеля облигаций

Дюрация портфеля облигаций рассчитывается как средняя взвешенная продолжительность выплат доходов портфеля при усреднении сроков поступления доходов по весовым коэффициентам, определяющимся дисконтированными величинами доходов:

$$D_{П} = \frac{\sum_{m=1}^{M} q_m \left[\sum_{i=1}^{n_m} t_i R_{m_i} (1+\rho_m)^{-i} \right]}{\sum_{m=1}^{M} q_m V_m}, \qquad (5.38)$$

где R_{m_i} - размер i-й выплаты по облигации m-го вида, $i = 1 \div n_{\max}$;

ρ_m - доходность по облигациям m-го вида;

V_m - рыночная стоимость облигаций вида "m".

Проведя преобразования, аналогичные п. 5.4.2, формулу (5.38) можно записать в виде:

$$D_{П} = \frac{\sum_{m=1}^{M} D_m q_m V_m}{\sum_{m=1}^{M} q_m V_m} = \sum_{m=1}^{M} D_m x_m, \qquad (5.39)$$

где D_m - дюрация облигаций m-го вида;

$x_m = \frac{q_m V_m}{\sum_{m=1}^{M} q_m V_m}$ - стоимостная доля облигаций вида m.

Рассчитаем дюрацию портфеля облигаций, рассматриваемого в примере 5.2. По формуле (5.21) рассчитаем дюрации облигаций первого D_1 и второго D_2 вида:

$$D_1 = \frac{1{,}12}{0{,}12} - \frac{3(0{,}08 - 0{,}12) + 1 + 0{,}12}{0{,}08[(1+0{,}12)^3 - 1] + 0{,}12} = 2{,}771.$$

$$D_2 = \frac{1{,}2}{0{,}2} - \frac{4(0{,}05 - 0{,}2) + 1 + 0{,}2}{0{,}05[(1+0{,}2)^4 - 1] + 0{,}2} = 3{,}635.$$

По формуле (5.39) определяем дюрацию портфеля облигаций

$$D_{П} = \frac{2{,}771 \cdot 3615{,}7 + 3{,}635 \cdot 1835{,}1}{5450{,}8} = 3{,}06.$$

При расчетах по формуле (5.38) для дюрации портфеля облигаций получим:

$$D_{П} = 1\left[\frac{320}{(1+0{,}12)} + \frac{150}{(1+0{,}2)}\right] + 2\left[\frac{320}{(1+0{,}12)^2} + \frac{150}{(1+0{,}2)^2}\right] +$$

$$+3\left[\frac{4320}{(1+0{,}12)^3} + \frac{150}{(1+0{,}2)^3}\right] + 4\frac{3150}{(1+0{,}2)^4} = 3{,}06.$$

Результаты расчетов дюрации портфеля облигаций по формулам (5.39) и (5.28) подтверждают справедливость формулы (5.39).

Выпуклость портфеля облигаций $w_{П}$, как и дюрация портфеля, определяется как средняя взвешенная величина выпуклостей облигаций, составляющих портфель с весами, пропорциональными рыночным стоимостям этих облигаций:

$$w_{П} = \frac{\sum_{m=1}^{M} w_m q_m V_m}{\sum_{m=1}^{M} q_m V_m}. \qquad (5.40)$$

Рассчитаем выпуклость портфеля облигаций, рассматриваемых в примере 5.2.

Выпуклость облигаций первого и второго вида рассчитываем по формуле (5.25):

$$w_1 = \frac{P_{N_1}}{V_1} C_1 - \sum_{k=1}^{n_1} (k+1)k(1+\rho)^{-k} + \frac{n_1(n_1+1)}{(1+\rho)^{n_1}} \frac{P_{N_1}}{V_1}.$$

$$w_1 = \frac{4000}{3615{,}7}\left\{0{,}08\sum_{k=1}^{3}(k+1)k(1+0{,}12)^{-k} + \frac{3\cdot 4}{(1+0{,}12)^3}\right\} \approx 10{,}8.$$

$$w_2 = \left\{\frac{P_{N_2}}{V_2} C_2 \sum_{k=1}^{n_2}(k+1)k(1+\rho)^{-k} + \frac{n_2(n_2+1)}{(1+\rho)^{n_2}}\right\} =$$

$$= \frac{3000}{1835{,}1}\left\{0{,}05\sum_{k=1}^{4}(k+1)k(1+0{,}2)^{-k} + \frac{4\cdot 5}{(1+0{,}2)^4}\right\} \approx 17{,}6.$$

По формуле (5.40) определяем выпуклость портфеля облигаций:

$$w_{П} = \frac{10{,}8\cdot 3615{,}7 + 17{,}6\cdot 1835{,}1}{5450{,}8} \approx 13{,}1.$$

5.9. Иммунизация портфеля облигаций

Под иммунизацией портфеля облигаций понимается такое управление портфелем, которое обеспечивает более высокий уровень его доходности в течение некоторого интервала времени при изменении рыночной процентной ставки как в меньшую, так и в большую сторону относительно первоначального значения ρ_o.

Покажем возможность такого управления портфелем на примере бескупонных облигаций. Для этого сравним доходность двух портфелей. Предположим, что первый портфель состоит из облигаций номинальной стоимостью P_{N_1} со сроком до погашения n_I лет. Рыночная стоимость данного портфеля и его дюрация будут равны:

$$V_I = \frac{P_{N_I}}{(1+\rho)^{n_I}};\ D_I = n_I. \tag{5.41}$$

Второй портфель сформируем из двух облигаций с номинальными стоимостями P_{N_1} и P_{N_2} и сроками до погашения соответственно равными t_1 и t_2 лет, которые будут удовлетворять неравенству:

$$t_1 < n_I < t_2.$$

Портфель, состоящий из этих двух облигаций, будем считать облигацией II.

Текущая стоимость этого портфеля и его дюрацию можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} V_{II} &= \frac{P_{N_1}}{(1+\rho)^{t_1}} + \frac{P_{N_2}}{(1+\rho)^{t_2}} \\ D_{II} &= t_1 \frac{P_{N_1}}{V_{II}(1+\rho)^{t_1}} + t_2 \frac{P_{N_2}}{V_{II}(1+\rho)^{t_2}}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

При приобретении портфелей I и II они должны быть эквивалентны, т. е. должны иметь одинаковые рыночные стоимости и дюрации:

$$\begin{cases} V_I(\rho) = V_{II}(\rho) \\ D_I(\rho) = D_{II}(\rho). \end{cases} \tag{5.43}$$

Из решения системы уравнений (5.43) определяются характеристики облигаций, составляющие портфель II, которые обеспечивают эквивалентность портфелей при некоторой доходности ρ_o. На рис. 5.9 приведены зависимости текущей рыночной стоимостей портфелей I и II в зависимости от доходности ρ, рассчитанные по данным примера 5.3. Из приведенных графиков видно, что кривая II текущей стоимости второго портфеля является более выпуклой, так как выполняется неравенство:

$$V_{II}(\rho) > V_I(\rho) \text{ при } \rho > \rho_o \text{ и } \rho < \rho_o = 0{,}15. \tag{5.44}$$

При $\rho = \rho_o = 0{,}15$ обеспечивается равенство текущих стоимостей портфелей $V_I(\rho) = V_{II}(\rho)$. Определим требования к срокам до погашения t_1 и t_2 облигаций портфеля II. Для этого вычислим вторые производные от текущих доходностей первого и второго портфелей:

$$V_I'(\rho) = -P_{N_1} n_I (1+\rho)^{-n_I - 1}$$

$$V_{II}''(\rho) = n_I (n_I + 1) P_{N_1} (1+\rho)^{-n_I - 2} = \qquad (5.45)$$

$$= \frac{P_{N_1}}{(1+\rho)^2}\left[\frac{n_I^2}{(1+\rho)^{+n_I}} + \frac{n_I}{(1+\rho)^{+n_I}}\right].$$

Умножив и разделив данное выражение на $V_I(\rho)$, получим:

$$V_I''(\rho) = \frac{V_I(\rho)}{(1+\rho)^2} = \left[\frac{P_{N_1} n_I^2}{V_I (1+\rho)^{n_I}} + \frac{P_{N_1} n_I}{V_I (1+\rho)^{n_I}}\right] = \frac{V_I(\rho)}{(1+\rho)^2}[n_I^2 + D_I].$$

Аналогично для второго портфеля получим:

$$V_{II}'(\rho) = -P_{N_1} t_1 (1+\rho)^{-t_1 - 1} - P_{N_2} t_2 (1+\rho)^{-t_2 - 1},$$

$$V_{II}''(\rho) = \frac{P_{N_1}(t_1+1)t_1}{(1+\rho)^{t_1+2}} + \frac{P_{N_2}(t_2+1)t_2}{(1+\rho)^{t_2+2}} = \qquad (5.46)$$

$$\frac{V_{II}(\rho)}{(1+\rho)^2}\left[\frac{P_{N_1} t_1^2}{V_{II}(1+\rho)^{t_1}} + \frac{P_{N_2} t_2^2}{V_{II}(1+\rho)^{t_2}} + \frac{P_{N_1} t_1}{V_{II}(1+\rho)^{t_1}} + \frac{P_{N_2} t_2}{V_{II}(1+\rho)^{t_2}}\right].$$

С учетом того, что отношения $\dfrac{P_{N_1}}{V_{II}(1+\rho)^{t_1}} = \omega_1$; $\dfrac{P_{N_2}}{V_{II}(1+\rho)^{t_2}} = \omega_2$; $\omega_1 + \omega_2$, определяют стоимостную долю первой и второй облигаций в портфеле II, выражение (5.46) можно записать в виде:

$$V_{II}''(\rho) = \frac{V_{II}(\rho)}{(1+\rho)^2}\left[\omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2 + D_{II}\right]. \qquad (5.47)$$

Для выполнения неравенства (5.44) вторая производная (выпуклость) $V_{II}''(\rho)$ должна быть больше, чем вторая производная $V_I''(\rho)$.

$$V_I''(\rho) < V_{II}''(\rho). \qquad (5.48)$$

С учетом условий (5.43) $V_I(\rho) = V_{II}(\rho) = V(\rho)$ и $D_I(\rho) = D_{II}(\rho) = D(\rho)$ и с учетом формул (5.45) и (5.47) неравенство (5.48) можно записать в виде:

$$n_I^2 < \omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2. \qquad (5.49)$$

Из условия равенства дюраций портфелей $D_I(\rho) = D_{II}(\rho)$ можно записать:

$$n_I < t_1 \omega_1 + t_2 \omega_2. \qquad (5.50)$$

Подставляя данное равенство в формулу (5.49), получим:

$$\omega_1^2 t_1^2 + \omega_2^2 t_2^2 + 2\omega_1\omega_2 t_1 t_2 = \omega_1(1-\omega_2)t_1^2 + \omega_2(1-\omega_1)t_2^2 + 2\omega_1\omega_2 t_1 t_2 =$$

$$= \omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2 - \omega_1\omega_2(t_1^2 + t_2^2 - 2t_1 t_2) < \omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2 \Rightarrow \omega_1\omega_2(t_2 - t_1)^2 > 0.$$

Так как данное неравенство всегда соблюдается, из этого следует вывод, что для соблюдения неравенств (5.48) и (5.49) необходимо и достаточно выполнение условия (5.50) о равенстве дюраций первого I и второго II портфеля облигаций.

Таким образом, для выполнения условия (5.43) достаточно потребовать, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 = n_I \\ \omega_1 + \omega_2 = 1. \end{cases} \tag{5.51}$$

Рассмотрим иммунизацию портфеля облигаций на примере.

Пример 5.3. Сформировать портфель из четырехгодичной $t_1 = 4$ и восьмигодичной $t_2 = 8$ бескупонных облигаций, иммунизирующий портфель, состоящий из одной бескупонной пятигодичной облигации номинальной стоимостью $P_{N_I} = 4000$ руб. при доходности $\rho_o = 0{,}15$.

Решение: Определим номинальные и текущие стоимости облигаций портфеля II из решения системы уравнений (5.51), которая для данных условий будет иметь вид:

$$\begin{cases} 4\omega_1 + 8\omega_2 = 5 \\ \omega_1 + \omega_2 = 1. \end{cases}$$

Из решения данной системы уравнений находим стоимостные доли ω_1 и ω_2 облигаций портфеля II:

$$\omega_1 = 0{,}75;\ \omega_2 = 0{,}25.$$

Определяем текущую стоимость облигаций портфеля I:

$$V_I = \frac{P_{N_1}}{(1+\rho)^{n_I}} = \frac{4000}{(1+0{,}15)^{-5}} = 1988{,}7.$$

С учетом равенства $V_I = V_{II}$ и стоимостных долей облигаций ω_1 и ω_2 определяем текущие стоимости облигаций, входящих в портфель II:

$$V_1 = V_{II} \cdot \omega_1 = 1988{,}7 \cdot 0{,}75 = 1491{,}5$$

$$V_2 = V_{II} \cdot \omega_2 = 1988{,}7 \cdot 0{,}25 = 497{,}2.$$

Определяем номинальные стоимости этих облигаций:

$$P_{N_1} = V_1(1+\rho)^4 = 1491{,}5(1+0{,}15)^4 = 2608{,}7$$

$$P_{N_2} = V_2(1+\rho)^8 = 497{,}2(1+0{,}15)^8 = 1520{,}9.$$

Результаты расчетов приведены также в табл. 5.4.

Таблица 5.4

ρ	0,03	0,07	0,11	0,15	0,19	0,23	0,27
V_I	3450,4	2851,9	2373,8	1988,7	1674,2	1420,8	1210,7
V_{II}	3518,4	2875,3	2378,4	1988,7	1679,1	1430,1	1227,5

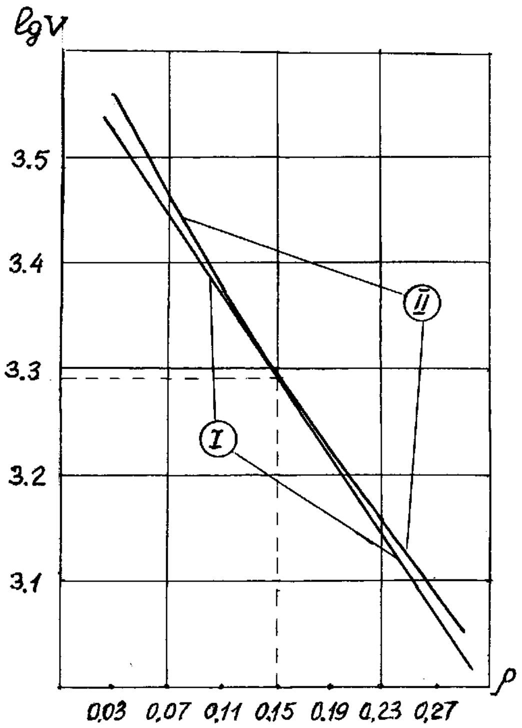

Рис. 5.9. Зависимости текущей рыночной стоимости портфелей I и II от доходности ρ

Рассчитаем зависимость текущей стоимость первого и второго портфеля облигаций от времени, прошедшего после их приобретения. Расчет данных зависимостей проводится по формулам:

$$V_I(t) = \frac{P_{N_I}}{(1+\rho)^{n_I - t}}$$

$$V_{II}(t) = \frac{P_{N_1}}{(1+\rho)^{n_1 - t}} + \frac{P_{N_2}}{(1+\rho)^{n_2 - t}}.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 5.5 и на рис. 5.10.

Таблица 5.5

	t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$\rho = 0{,}07$	V_I	2851,9	2950,1	3051,6	3156,6	3265,2	3377,5	3493,7	3614,0	3738,3
	V_{II}	2875,3	2974,3	3076,6	3182,5	3292,0	3405,2	3522,4	3643,6	3769,0
	ΔV	23,4	24,2	25,0	25,9	26,8	27,7	28,7	29,6	30,7
$\rho = 0{,}3$	V_I	1077,3	1228,3	1400,5	1596,8	1820,7	2075,9	2366,9	2698,6	3076,9
	V_{II}	1099,8	1254,0	1429,8	1630,2	1858,7	2119,3	2416,3	2755,0	3141,2
	ΔV	22,5	25,7	29,3	33,4	38,0	43,4	49,4	56,4	64,3

На рис. 5.10 приведена зависимость разности текущих стоимостей второго и первого портфеля облигаций ($\Delta V = V_{II}(t) - V_I(t)$. Из расчетов видно, что при уменьшении и увеличении значений доходности облигаций к погашению второй портфель облигаций имеет бо́льшую текущую стоимость, чем первый. При увеличении времени $0 \le t \le 4$ разница в текущих стоимостях облигаций портфеля II и I увеличивается.

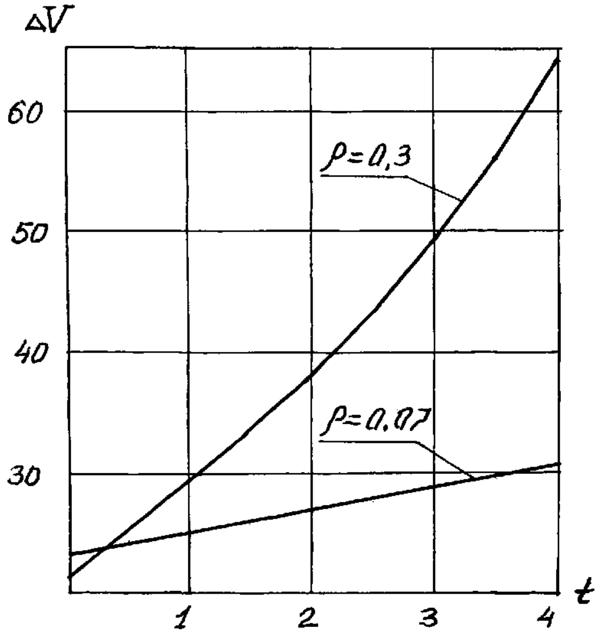

Рис. 5.10. Зависимость разности текущих стоимостей второго и первого портфеля облигаций

Контрольные вопросы и задания

1. Основные понятия и характеристики доходности облигаций.
2. Понятие текущей стоимости облигаций, рыночной стоимости облигации, текущего курса облигации, текущей и средней доходности облигаций.
3. Определить текущую стоимость бескупонной облигации номинальной стоимостью P_N = 10000 руб. за 4 года до погашения при ставке дисконтирования i = 9 % годовых.
4. Определить текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 10000 руб. с купонной ставкой "c" = 10 % за 5 лет до погашения при ставке дисконтирования i = 8 % годовых.
5. Определить текущий курс и текущую доходность облигации номинальной стоимостью P_N = 20000 руб. и купонной ставкой дохода "c" = 9 %, если ее рыночная стоимость равна V = 18000 руб.
6. Определить понятие текущей доходности облигации к погашению и ее связь с рыночной стоимостью облигации.
7. Определить текущую доходность бескупонной облигации за три года до погашения $n = 3$, если текущий курс облигации равен 0,8.
8. Определить текущую (рыночную) стоимость облигации номинальной стоимостью P_N = 40000 руб. с купонным доходом c = 10 % за

n = 4 года до ее погашения, если текущая доходность облигации равна ρ = 8 %.

9. Доходность облигации к погашению больше купонной ставки. Чему будет равен курс облигации (K < 1 и K > 1)?

10. Чему будет равен средний срок поступления дохода бескупонной облигации номинальной стоимостью P_N = 10000 руб. и сроком до погашения t = 4,5 года?

11. Чему будет равен средний срок поступления дохода облигации с купонным доходом "c" = 11 % и сроком до ее погашения n = 4 года?

12. Чему будет равен средний срок поступления дохода облигации при ежеквартальных выплатах купонного дохода по ставке c/r = 2,5 % при сроке до погашения облигации 3 года?

13. Дюрация финансового потока, ее смысловое толкование и формула для ее вычисления.

14. Вычислить дюрацию финансового потока:

$$CF = \{(0;100);(1;300);(2;250);(3;200);(4;150)\}$$

при ставке доходности i = 12 % годовых.

15. Вычислить дюрацию облигации со сроком погашения n = 4 года, купонной ставкой c = 10 % и доходностью к погашению, равной ρ = 8 %.

16. Чему равна дюрация бескупонной облигации?

17. Определить относительное изменение рыночной стоимости облигации с доходностью к погашению ρ = 10 % и дюрацией D = 3,5 при относительном уменьшении доходности к погашению на 5 %.

18. Чему будет равен текущий курс облигации, если доходность к погашению равна купонной ставке облигации?

19. Вычислить значение дюрации облигации со сроком до погашения n = 4 года, если купонная ставка и доходность к погашению равны $c = \rho$ = 9 %.

20. Пояснить понятие выпуклости облигации.

21. Определить значение выпуклости облигации с купонной ставкой "c" = 9 %, сроком погашения n = 3 года, если текущий курс облигации равен K = 1.

22. Определить относительное изменение рыночной стоимости облигации с учетом ее выпуклости, если срок до погашения облигации n = 3 года, купонная ставка дохода "c" = 0,1, доходность к погашению ρ = 0,08, а текущий курс облигации равен K = 0,8, а относительное изменение доходности к погашению $\frac{\Delta\rho}{\rho}\cdot 100\ \% = 10\%$.

23. Портфель облигаций состоит из двух видов облигаций со следующими характеристиками:

P_{N_1} = 3000 руб.; "c_1" = 0,09; ρ_1 = 0,11; n_1 = 3 года

P_{N_2} = 4000 руб.; "c_2" = 0,07; ρ_2 = 0,2; n_2 = 4 года.

Количество облигаций первого и второго вида в портфеле соответственно равно $q_1 = 2$; $q_2 = 3$. Определить суммарную рыночную стоимость портфеля облигаций.

24. По условию задачи 23 определить доходность портфеля облигаций ρ_Σ. При расчетах принять $\rho_{\min} < \rho_\Sigma < \rho_{\max}$; $\rho_{\min} = 0{,}16$, $\rho_{\max} = 0{,}18$.

25. По условию задачи 23 определить средний срок поступления дохода портфеля облигаций.

26. Для портфеля облигаций, приведенного в условии задачи 23, определить дюрацию портфеля облигаций.

27. Определить выпуклость портфеля облигаций по условию задачи 23.

Список использованных источников

1. Брусов, П. А. Финансовая математика: учеб. пособие / П. Н. Брусов [и др.]. – Москва: КноРус, 2010. – 224 с.
2. Ващенко, Т. В. Математика финансового менеджмента /Т. В. Ващенко. – Москва: Изд-во "Перспектива", 1996. – 80 с.
3. Кузнецов, Б. Т. Математическая экономика: учеб. пособие для студентов вузов / Б. Т. Кузнецов. – Москва: Юнити-Дана, 2012. – 344 с.
4. Кузнецов, Б. Т. Математические методы финансового анализа: учеб. пособие для вузов / Б. Т. Кузнецов. – Москва: Юнити-Дана, 2015. – 159 с.
5. Малыхин, В. И. Финансовая математика / В. И. Малыхин. – Москва: Дело, 2001.
6. Малыхин, В. И. Оптимальные портфели и пакеты ценных бумаг / В. И. Малыхин. – Москва: ГУЦ, 2002.
7. Маренков, Н. Л. Цены и доходность ценных бумаг / Н. Л. Маренков, Н. Н. Косаренко// Рынок ценных бумаг в России: учеб. пособие. – Москва: Флинта, 2011, 240 с.
8. Чернов, В. А. Инвестиционный анализ: учеб. пособие для вузов / В. А. Чернов. – Москва: Юнити-Дана, 2015. – 159 с.
9. Четыркин, Е. М. Финансовая математика: учеб. / Е. М. Четыркин. – Москва: Дело, 2001. – 400 с.
10. Четыркин, Е. М. Облигации / Е. М. Четыркин. – Москва: Дело, 2005.

Приложения

Приложение А

Коэффициенты наращения для сложных ставок ссудного процента $k_{н.с} = (1 + i_с)^n$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	15%	20%	24%	28%	32%	36%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000	1,1200	1,1500	1,2000	1,2400	1,2800	1,3200	1,3600
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100	1,2544	1,3225	1,4400	1,5376	1,6384	1,7424	1,8496
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310	1,4049	1,5209	1,7280	1,9066	2,0972	2,3000	2,5155
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641	1,5735	1,7490	2,0736	2,3642	2,6844	3,0360	3,4210
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105	1,7623	2,0114	2,4883	2,9316	3,4360	4,0075	4,6526
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716	1,9738	2,3131	2,9860	3,6352	4,3980	5,2899	6,3275
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487	2,2107	2,6600	3,5832	4,5077	5,6295	6,9826	8,6054
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436	2,4760	3,0590	4,2998	5,5895	7,2058	9,2170	11,703
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579	2,7731	3,5179	5,1598	6,9310	9,2234	12,166	15,917
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937	3,1058	4,0456	6,1917	8,5944	11,806	16,060	21,647
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531	3,4785	4,6524	7,4301	10,657	15,112	21,199	29,439
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384	3,8960	5,3503	8,9161	13,215	19,343	27,983	40,037
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523	4,3635	6,1528	10,699	16,386	24,759	36,937	54,451
14	1,1495	1,3195	1,5426	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975	4,8871	7,0757	12,839	20,319	31,691	48,757	74,053
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772	5,4736	8,1371	15,407	25,196	40,565	64,359	100,71
16	1,1726	1,3728	1,6047	1,8730	2,1829	2,5404	2,9522	3,4259	3,9703	4,5950	6,1304	9,3576	18,488	31,243	51,923	84,954	136,97
17	1,1843	1,4002	1,6528	1,9479	2,2920	2,6928	3,1588	3,7000	4,3276	5,0545	6,8660	10,761	22,186	38,741	66,461	112,14	186,28
18	1,1961	1,4282	1,7024	2,0258	2,4066	2,8543	3,3799	3,9960	4,7171	5,5599	7,6900	12,375	26,623	48,039	85,071	148,02	253,34
19	1,2081	1,4568	1,7535	2,1068	2,5270	3,0256	3,6165	4,3157	5,1417	6,1159	8,6128	14,232	31,948	59,568	108,89	195,39	344,54
20	1,2202	1,4859	1,8061	2,1911	2,6533	3,2071	3,8697	4,6610	5,6044	6,7275	9,6463	16,367	38,338	73,864	139,38	257,92	468,57
21	1,2324	1,5157	1,8603	2,2788	2,7860	3,3996	4,1406	5,0338	6,1088	7,4002	10,804	18,822	46,005	91,592	178,41	340,45	637,26
22	1,2447	1,5460	1,9161	2,3699	2,9253	3,6035	4,4304	5,4365	6,6586	8,1403	12,100	21,645	55,206	113,57	228,36	449,39	866,67
23	1,2572	1,5769	1,9736	2,4647	3,0715	3,8197	4,7405	5,8715	7,2579	8,9543	13,552	24,891	66,247	140,83	292,30	593,20	1178,7
24	1,2697	1,6084	2,0328	2,5633	3,2251	4,0489	5,0724	6,3412	7,9111	9,8497	15,179	28,625	79,497	174,63	374,14	783,02	1603,0
25	1,2824	1,6406	2,0938	2,6658	3,3864	4,2919	5,4274	6,8485	8,6231	10,835	17,000	32,919	95,396	216,54	478,90	1033,6	2180,1
26	1,2953	1,6734	2,1566	2,7725	3,5557	4,5494	5,8074	7,3964	9,3992	11,918	19,040	37,857	114,48	268,51	613,00	1364,3	2964,9
27	1,3082	1,7069	2,2213	2,8834	3,7335	4,8223	6,2139	7,9881	10,245	13,110	21,325	43,535	137,37	332,95	784,64	1800,9	4032,3
28	1,3213	1,7410	2,2879	2,9987	3,9201	5,1117	6,6488	8,6271	11,167	14,421	23,884	50,066	164,84	412,86	1004,3	2377,2	5483,9
29	1,3345	1,7758	2,3566	3,1187	4,1161	5,4184	7,1143	9,3173	12,172	15,863	26,750	57,575	197,81	511,95	1285,6	3137,9	7458,1
30	1,3478	1,8114	2,4273	3,2434	4,3219	5,7435	7,6123	10,063	13,268	17,449	29,960	66,212	237,38	634,82	1645,5	4142,1	10143
40	1,4889	2,2080	3,2620	4,8010	7,0400	10,286	14,974	21,725	31,409	45,259	93,051	267,86	1469,8	5455,9	19427	66521	*
50	1,6446	2,6916	4,3839	7,1067	11,467	18,420	29,457	46,902	74,358	117,39	289,00	1083,7	9100,4	46890	*	*	*
60	1,8167	3,2810	5,8916	10,520	18,679	32,988	57,946	101,26	176,03	304,48	897,60	4384,0	56348	*	*	*	*

* $k_{н.с} > 99\,999$.

Приложение Б

Коэффициенты дисконтирования для сложных ставок ссудного процента $k_д = 1/(1 + i_c)^n$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	15%	20%	24%	28%	32%	36%
1	,9901	,9804	,9709	,9615	,9524	,9434	,9346	,9259	,9174	,9091	,8929	,8696	,8333	,8065	,7813	,7576	,7353
2	,9803	,9612	,9426	,9246	,9070	,8900	,8734	,8573	,8417	,8264	,7972	,7561	,6944	,6504	,6104	,5739	,5407
3	,9706	,9423	,9151	,8890	,8638	,8396	,8163	,7938	,7722	,7513	,7118	,6575	,5787	,5245	,4768	,4348	,3975
4	,9610	,9238	,8885	,8548	,8227	,7921	,7629	,7350	,7084	,6830	,6355	,5718	,4823	,4230	,3725	,3294	,2923
5	,9515	,9057	,8626	,8219	,7835	,7473	,7130	,6806	,6499	,6209	,5674	,4972	,4019	,3411	,2910	,2495	,2149
6	,9420	,8880	,8375	,7903	,7462	,7050	,6663	,6302	,5963	,5645	,5066	,4323	,3349	,2751	,2274	,1890	,1580
7	,9327	,8706	,8131	,7599	,7107	,6651	,6227	,5835	,5470	,5132	,4523	,3759	,2791	,2218	,1776	,1432	,1162
8	,9235	,8535	,7894	,7307	,6768	,6274	,5820	,5403	,5019	,4665	,4039	,3269	,2326	,1789	,1388	,1085	,0854
9	,9143	,8368	,7664	,7026	,6446	,5919	,5439	,5002	,4604	,4241	,3606	,2843	,1938	,1443	,1084	,0822	,0628
10	,9053	,8203	,7441	,6756	,6139	,5584	,5083	,4632	,4224	,3855	,3220	,2472	,1615	,1164	,0847	,0623	,0462
11	,8963	,8043	,7224	,6496	,5847	,5268	,4751	,4289	,3875	,3505	,2875	,2149	,1346	,0938	,0662	,0472	,0340
12	,8874	,7885	,7014	,6246	,5568	,4970	,4440	,3971	,3555	,3186	,2567	,1869	,1122	,0757	,0517	,0357	,0250
13	,8787	,7730	,6810	,6006	,5303	,4688	,4150	,3677	,3262	,2897	,2292	,1625	,0935	,0610	,0404	,0271	,0184
14	,8700	,7579	,6611	,5775	,5051	,4423	,3878	,3405	,2992	,2633	,2046	,1413	,0779	,0492	,0316	,0205	,0135
15	,8613	,7430	,6419	,5553	,4810	,4173	,3624	,3152	,2745	,2394	,1827	,1229	,0649	,0397	,0247	,0155	,0099
16	,8528	,7284	,6232	,5339	,4581	,3936	,3387	,2919	,2519	,2176	,1631	,1069	,0541	,0320	,0193	,0118	,0073
17	,8444	,7142	,6050	,5134	,4363	,3714	,3166	,2703	,2311	,1978	,1456	,0929	,0451	,0258	,0150	,0089	,0054
18	,8360	,7002	,5874	,4936	,4155	,3503	,2959	,2502	,2120	,1799	,1300	,0808	,0376	,0208	,0118	,0068	,0039
19	,8277	,6864	,5703	,4746	,3957	,3305	,2765	,2317	,1945	,1635	,1161	,0703	,0313	,0168	,0092	,0051	,0029
20	,8195	,6730	,5537	,4564	,3769	,3118	,2584	,2145	,1784	,1486	,1037	,0611	,0261	,0135	,0072	,0039	,0021
21	,8114	,6598	,5375	,4388	,3589	,2942	,2415	,1987	,1637	,1351	,0926	,0531	,0217	,0109	,0056	,0029	,0016
22	,8034	,6468	,5219	,4220	,3418	,2775	,2257	,1839	,1502	,1228	,0826	,0462	,0181	,0088	,0044	,0022	,0012
23	,7954	,6342	,5067	,4057	,3256	,2618	,2109	,1703	,1378	,1117	,0738	,0402	,0151	,0071	,0034	,0017	,0008
24	,7876	,6217	,4919	,3901	,3101	,2470	,1971	,1577	,1264	,1015	,0659	,0349	,0126	,0057	,0027	,0013	,0006
25	,7798	,6095	,4776	,3751	,2953	,2330	,1842	,1460	,1160	,0923	,0588	,0304	,0105	,0046	,0021	,0010	,0005
26	,7720	,5976	,4637	,3607	,2812	,2198	,1722	,1352	,1064	,0839	,0525	,0264	,0087	,0037	,0016	,0007	,0003
27	,7644	,5859	,4502	,3468	,2678	,2074	,1609	,1252	,0976	,0763	,0469	,0230	,0073	,0030	,0013	,0006	,0002
28	,7568	,5744	,4371	,3335	,2551	,1956	,1504	,1159	,0895	,0693	,0419	,0200	,0061	,0024	,0010	,0004	,0002
29	,7493	,5631	,4243	,3207	,2429	,1846	,1406	,1073	,0822	,0630	,0374	,0174	,0051	,0020	,0008	,0003	,0001
30	,7419	,5521	,4120	,3083	,2314	,1741	,1314	,0994	,0754	,0573	,0334	,0151	,0042	,0016	,0006	,0002	,0001
35	,7059	,5000	,3554	,2534	,1813	,1301	,0937	,0676	,0490	,0356	,0189	,0075	,0017	,0005	,0002	,0001	*
40	,6717	,4529	,3066	,2083	,1420	,0972	,0668	,0460	,0318	,0221	,0107	,0037	,0007	,0002	,0001	*	*
45	,6391	,4102	,2644	,1712	,1113	,0727	,0476	,0313	,0207	,0137	,0061	,0019	,0003	,0001	*	*	*
50	,6080	,3715	,2281	,1407	,0872	,0543	,0339	,0213	,0134	,0085	,0035	,0009	,0001	*	*	*	*
55	,5785	,3365	,1968	,1157	,0683	,0406	,0242	,0145	,0087	,0053	,0020	,0005	*	*	*	*	*

* $k_д$ < 0,0001.

Приложение В

Таблица интеграла вероятности $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ **для** $0{,}00 \le z \le 4{,}99$; $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0 7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,90147
1,3	0 90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408

Продолжение приложения В

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0 96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	$0{,}9^{2}0097$*	$0{,}9^{2}0358$	$0{,}9^{2}0613$	$0{,}9^{2}0863$	$0{,}9^{2}1106$	$0{,}9^{2}344$	$0{,}9^{2}1576$
2,4	$0{,}9^{2}1802$	$0{,}9^{2}2024$	$0{,}9^{2}2240$	$0{,}9^{2}2451$	$0{,}9^{2}2656$	$0{,}9^{2}2857$	$0{,}9^{2}3053$	$0{,}9^{2}3244$	$0{,}9^{2}3431$	$0{,}9^{2}3613$
2,5	$0{,}9^{2}3790$	$0{,}9^{2}3963$	$0{,}9^{2}4132$	$0{,}9^{2}4297$	$0{,}9^{2}4457$	$0{,}9^{2}4614$	$0{,}9^{2}4766$	$0{,}9^{2}4915$	$0{,}9^{2}5060$	$0{,}9^{2}5201$
2,6	$0{,}9^{2}5339$	$0{,}9^{2}5473$	$0{,}9^{2}5604$	$0{,}9^{2}5731$	$0{,}9^{2}5885$	$0{,}9^{2}5975$	$0{,}9^{2}6093$	$0{,}9^{2}6207$	$0{,}9^{2}6319$	$0{,}9^{2}6427$
2,7	$0{,}9^{2}6533$	$0{,}9^{2}6636$	$0{,}9^{2}6736$	$0{,}9^{2}6833$	$0{,}9^{2}6928$	$0{,}9^{2}7020$	$0{,}9^{2}7110$	$0{,}9^{2}7197$	$0{,}9^{2}7282$	$0{,}9^{2}7365$
2,8	$0{,}9^{2}7445$	$0{,}9^{2}7523$	$0{,}9^{2}7599$	$0{,}9^{2}7673$	$0{,}9^{2}7744$	$0{,}9^{2}7814$	$0{,}9^{2}7882$	$0{,}9^{2}7948$	$0{,}9^{2}8012$	$0{,}9^{2}8074$
2,9	$0{,}9^{2}8134$	$0{,}9^{2}8193$	$0{,}9^{2}8250$	$0{,}9^{2}8305$	$0{,}9^{2}8359$	$0{,}9^{2}8411$	$0{,}9^{2}8462$	$0{,}9^{2}8511$	$0{,}9^{2}8559$	$0{,}9^{2}8605$
3,0	$0{,}9^{2}8650$	$0{,}9^{2}8694$	$0{,}9^{2}8736$	$0,\ 9^{2}8777$	$0{,}9^{2}8817$	$0{,}9^{2}8856$	$0{,}9^{2}8893$	$0{,}9^{2}8930$	$0{,}9^{2}8965$	$0{,}9^{2}8999$
3,1	$0{,}9^{3}0324$**	$0{,}9^{3}0646$	$0{,}9^{3}0957$	$0{,}9^{3}1260$	$0{,}9^{3}1553$	$0{,}9^{3}1836$	$0{,}9^{3}2112$	$0{,}9^{3}2378$	$0{,}9^{3}2636$	$0{,}9^{3}2886$
3,2	$0{,}9^{3}3129$	$0{,}9^{3}3363$	$0{,}9^{3}3590$	$0{,}9^{3}3810$	$0{,}9^{3}4024$	$0{,}9^{3}4230$	$0{,}9^{3}4429$	$0{,}9^{3}4623$	$0{,}9^{3}4810$	$0{,}9^{3}4991$
3,3	$0{,}9^{3}5166$	$0{,}9^{3}5335$	$0{,}9^{3}5499$	$0{,}9^{3}5658$	$0{,}9^{3}5811$	$0{,}9^{3}5959$	$0{,}9^{3}6103$	$0{,}9^{3}6242$	$0{,}9^{3}6376$	$0{,}9^{3}6505$
3,4	$0{,}9^{3}6631$	$0{,}9^{3}6752$	$0{,}9^{3}6869$	$0\ 9^{3}6982$	$0{,}9^{3}7091$	$0{,}9^{3}7197$	$0{,}9^{3}7299$	$0{,}9^{3}7398$	$0{,}9^{3}7493$	$0{,}9^{3}7585$
3,5	$0{,}9^{3}7674$	$0{,}9^{3}7759$	$0{,}9^{3}7842$	$0{,}9^{3}7922$	$0{,}9^{3}7999$	$0{,}9^{3}8074$	$0{,}9^{3}8146$	$0{,}9^{3}8215$	$0{,}9^{3}8282$	$0{,}9^{3}8347$
3,6	$0{,}9^{3}8409$	$0{,}9^{3}8469$	$0{,}9^{3}8527$	$0{,}9^{3}8583$	$0{,}9^{3}8637$	$0{,}9^{3}8689$	$0{,}9^{3}8739$	$0{,}9^{3}8787$	$0{,}9^{3}8834$	$0{,}9^{3}8879$

Продолжение приложения В

z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
3,7	$0{,}9^{3}8922$	$0{,}9^{3}8964$	$0{,}9^{4}0039$	$0{,}9^{4}0426$	$0{,}9^{4}0799$	$0{,}9^{4}1158$	$0{,}9^{4}1504$	$0{,}9^{4}1838$	$0{,}9^{4}2159$	$0{,}9^{4}2468$
3,8	$0{,}9^{4}2765$	$0{,}9^{4}3052$	$0{,}9^{4}3327$	$0{,}9^{4}3593$	$0{,}9^{4}3848$	$0{,}9^{4}4094$	$0{,}9^{4}4331$	$0{,}9^{4}4558$	$0{,}9^{4}4777$	$0{,}9^{4}4988$
3,9	$0{,}9^{4}5190$	$0{,}9^{4}5385$	$0{,}9^{4}5573$	$0{,}9^{4}5753$	$0{,}9^{4}5926$	$0{,}9^{4}6092$	$0{,}9^{4}6253$	$0{,}9^{4}6406$	$0{,}9^{4}6554$	$0{,}9^{4}6696$
4,0	$0{,}9^{4}6833$	$0{,}9^{4}6964$	$0{,}9^{4}7090$	$0{,}9^{4}7211$	$0{,}9^{4}7327$	$0{,}9^{4}7439$	$0{,}9^{4}7546$	$0{,}9^{4}7649$	$0{,}9^{4}7748$	$0{,}9^{4}7843$
4,1	$0{,}9^{4}7934$	$0{,}9^{4}8022$	$0{,}9^{4}8106$	$0{,}9^{4}8186$	$0{,}9^{4}8263$	$0{,}9^{4}8338$	$0{,}9^{4}8409$	$0{,}9^{4}8477$	$0{,}9^{4}8542$	$0{,}9^{4}8605$
4,2	$0{,}9^{4}8665$	$0{,}9^{4}8723$	$0{,}9^{4}8778$	$0{,}9^{4}8832$	$0{,}9^{4}8882$	$0{,}9^{4}8931$	$0{,}9^{4}8978$	$0{,}9^{5}0226$	$0{,}9^{5}0655$	$0{,}9^{5}1066$
4,3	$0{,}9^{5}1460$	$0{,}9^{5}1837$	$0{,}9^{5}2199$	$0{,}9^{5}2545$	$0{,}9^{5}2876$	$0{,}9^{5}3193$	$0{,}9^{5}3497$	$0{,}9^{5}3788$	$0{,}9^{5}4066$	$0{,}9^{5}4332$
4,4	$0{,}9^{5}4587$	$0{,}9^{5}4841$	$0{,}9^{5}5065$	$0{,}9^{5}5288$	$0{,}9^{5}5502$	$0{,}9^{5}5706$	$0{,}9^{5}5902$	$0{,}9^{5}6089$	$0{,}9^{5}6268$	$0{,}9^{5}6439$
4,5	$0{,}9^{5}6602$	$0{,}9^{5}6759$	$0{,}9^{5}6908$	$0{,}9^{5}7051$	$0{,}9^{5}7187$	$0{,}9^{5}7318$	$0{,}9^{5}7442$	$0{,}9^{5}7561$	$0{,}9^{5}7675$	$0{,}9^{5}7784$
4,6	$0{,}9^{5}7888$	$0{,}9^{5}7987$	$0{,}9^{5}8081$	$0{,}9^{5}8172$	$0{,}9^{5}8258$	$0{,}9^{5}8340$	$0{,}9^{5}8419$	$0{,}9^{5}8494$	$0{,}9^{5}8566$	$0{,}9^{5}8634$
4,7	$0{,}9^{5}8699$	$0{,}9^{5}8761$	$0{,}9^{5}8821$	$0{,}9^{5}8877$	$0{,}9^{5}8931$	$0{,}9^{5}8983$	$0{,}9^{6}0320$	$0{,}9^{6}0789$	$0{,}9^{6}1235$	$0{,}9^{6}1661$
4,8	$0{,}9^{6}2067$	$0{,}9^{6}2453$	$0{,}9^{6}2822$	$0{,}9^{6}3173$	$0{,}9^{6}3508$	$0{,}9^{6}3827$	$0{,}9^{6}4131$	$0{,}9^{6}4420$	$0{,}9^{6}4696$	$0{,}9^{6}4958$
4,9	$0{,}9^{6}5208$	$0{,}9^{6}5446$	$0{,}9^{6}5673$	$0{,}9^{6}5889$	$0{,}9^{6}6094$	$0{,}9^{6}6289$	$0{,}9^{6}6475$	$0{,}9^{6}6652$	$0{,}9^{6}6821$	$0{,}9^{6}6981$

Пример: $\Phi(3{,}57) = 0{,}9^{3}8215 = 0{,}9998215$.

* $0{,}9^{2}0097 = 0990097$

** $0{,}9^{3}0324 = 0{,}990324$

Учебное издание

Анатолий Михайлович Карлов

ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие для обучающихся в магистратуре
по направлениям подготовки
"Экономика", "Менеджмент", "Финансы и кредит"

Подписано в печать 06.10.2016 г.
Бумага для множительных аппаратов. Формат 60 х 84/16.
Гарнитура Таймс. Ризограф. Усл. печ. л. 6,9. Уч.-изд. л. 8,5. Заказ 70.
Тираж 100 экз.

Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
"Калининградский государственный технический университет".
236022, г. Калининград, Советский проспект, 1