

Министерство образования и науки Российской Федерации

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс  
«Физические основы информационно-телекоммуникационных систем»

Орлов И.Я.  
Односецев В.А.  
Ивлев Д.Н.  
Лупов С.Ю.

ОСНОВЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ  
(Электронное учебное пособие)

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Учебная дисциплина: «Основы радиоэлектроники»

Специальность «010800.62 Радиофизика»

Нижний Новгород  
2011



Рецензент: зав. кафедрой бионики и статистической радиофизики  
Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского,  
профессор, д.ф.-м.н. Флакман А.Г.

Орлов И.Я., Односецев В.А., Ивлев Д.Н., Лупов С.Ю. Основы  
радиоэлектроники: Электронное учебное пособие / Н.Новгород:  
Нижегородский госуниверситет им. Н.И.Лобачевского, 2011. - 169 с.

В учебном пособии изложены основы теории сигналов и цепей. Приведены сведения о процессах преобразования сигналов линейными, параметрическими и нелинейными цепями. Рассмотрены принципы усиления, детектирования и преобразования сигналов. Представлены сведения о методах получения модулированных колебаний. Анализируются особенности некоторых практических радиотехнических устройств.

Пособие предназначено для студентов радиофизического факультета по специальностям: «Радиофизика и электроника», «Фундаментальная радиофизика» и «Информационные системы в радиофизике и телекоммуникациях».



## Введение

Учебный курс “Основы радиоэлектроники” является одним из базовых курсов радиотехнического цикла по специальностям “Радиофизика” и “Информационные системы”.

Курс имеет целью научить студентов методам представления сигналов, методам математического описания радиотехнических цепей и основам теории преобразования сигналов в радиотехнических устройствах. Как следствие - подготовить студентов к практическому применению полученных знаний при исследовании радиотехнических устройств и измерительных систем, а также при использовании радиотехнических методов исследований в экспериментальной радиофизике и в информационных системах.

Изучение курса включает освоение следующих основных направлений:

- основные положения методов представления сигналов и математического описания линейных цепей с постоянными и переменными параметрами, а также нелинейных цепей;
- вопросы преобразования сигналов линейными, параметрическими и нелинейными цепями (фильтрация, усиление, детектирование, преобразование частоты, модуляция, генерация);
- принципы действия типовых радиотехнических каскадов (усилитель, детектор, преобразователь частоты, генератор, модулятор).

Курс опирается на материалы курсов общей физики (электричество, колебания и волны, атомная физика), математики (ряды, дифференцирование, интегрирование, функции комплексного переменного, векторный анализ, дифференциальные уравнения).

В процессе изучения курса студенты должны освоить:

- временное и спектральное представление сигналов;
- математическое описание линейных, параметрических и нелинейных цепей;
- процессы преобразования сигналов в радиотехнических цепях;
- применение изученных методов и устройств при дальнейшем обучении.

В целом такая подготовка по физическим основам радиотехники необходима, т.к. в настоящее время радиоэлектроника во многом определяет технический прогресс в большинстве областей науки и техники. Так, знания радиоэлектроники необходимы для исследования сигналов и систем передачи информации. Например, для изучения радиотехнического канала передачи информации на расстоянии (рис.1.1), а также оптического и акустического каналов.



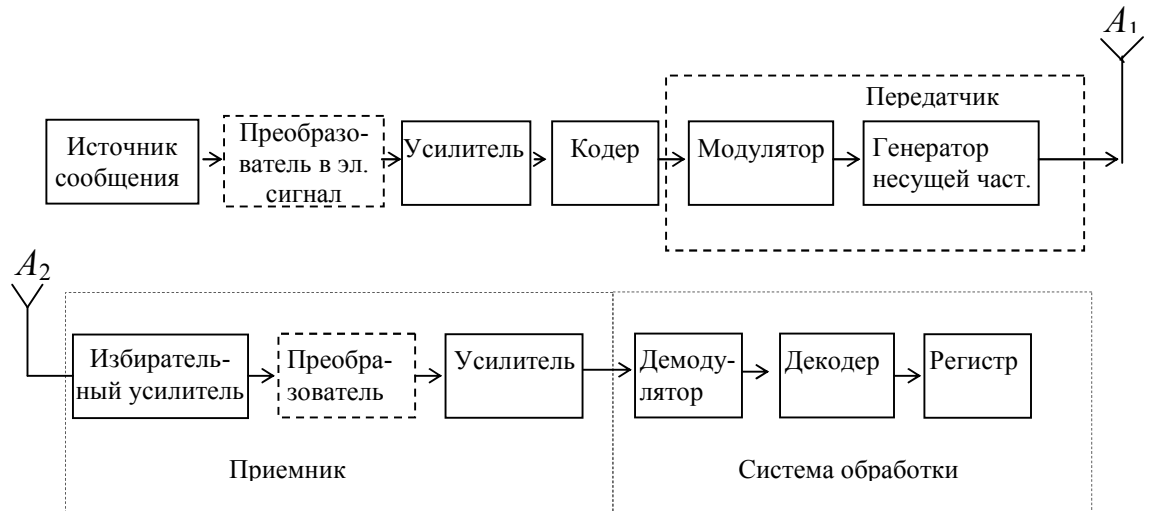


Рис. 1.1

Без знаний радиоэлектроники практически невозможна разработка измерительной аппаратуры, используемой в радиофизических измерениях.

На рис. 1.2 показана типовая структура прибора, предназначенного для радиофизических измерений.

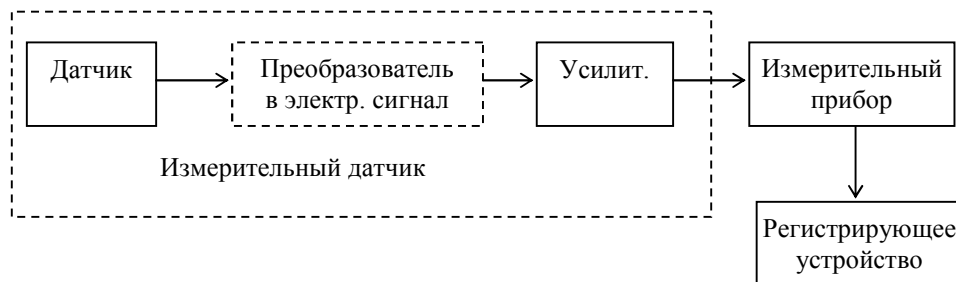


Рис. 1.2

Таким образом, радиоэлектроника является базовой в таких областях, как:

- экспериментальная радиофизика;
- радиофизические методы в биологии, медицине и экологии;
- радиофизические методы в технике;
- оборонные радиотехнические системы;
- системы радиосвязи и телеуправления.

## I. Введение в теорию радиотехнических сигналов

### 1. Классификация радиотехнических сигналов

а) С информационной точки зрения:

- детерминированный – сигнал, мгновенное значение которого в любой момент времени можно предсказать с вероятностью 1.

Строго говоря, таких сигналов не существует из-за неизбежного взаимодействия их с радиотехническими системами, окружающей средой, помехами, шумами и т.д.;



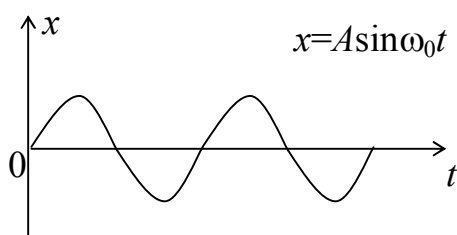


Рис. 1.3

- случайные – мгновенные значения которых заранее не известны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью, меньшей 1 (примеры: радиолокационный сигнал, радиоастрономический сигнал, акустический сигнал, ...).

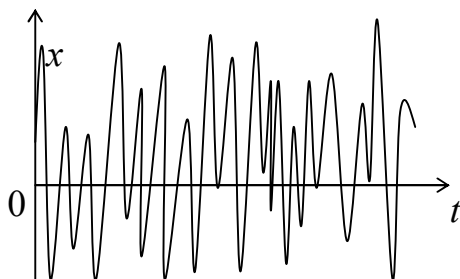


Рис. 1.4

б) По характеру их изменений во времени;

- непрерывные во времени и произвольные по величине (аналоговые или континуальные).

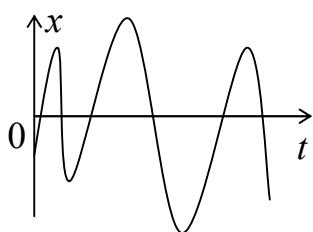


Рис. 1.5

Такие сигналы можно толковать как электрическую модель физической величины:

- дискретные во времени и произвольные по величине;

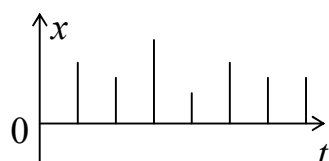


Рис. 1.6

- непрерывные во времени и квантованные по величине;

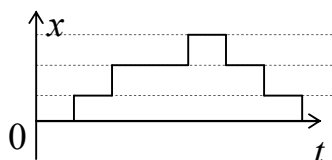


Рис. 1.7

- дискретные по времени и квантованные по величине;

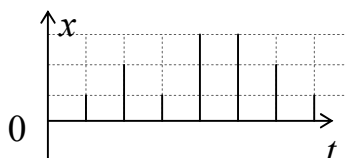


Рис. 1.8



в) По времени существования сигнала:

- непрерывные;

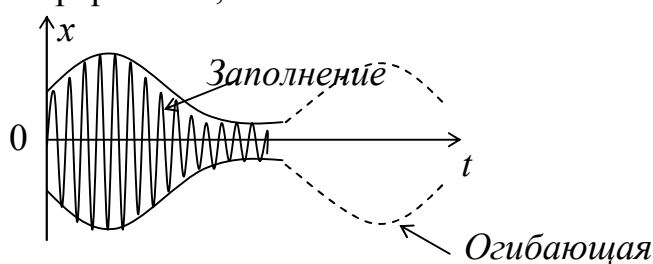


Рис. 1.9

- импульсные (видеоимпульсные, радиоимпульсные).

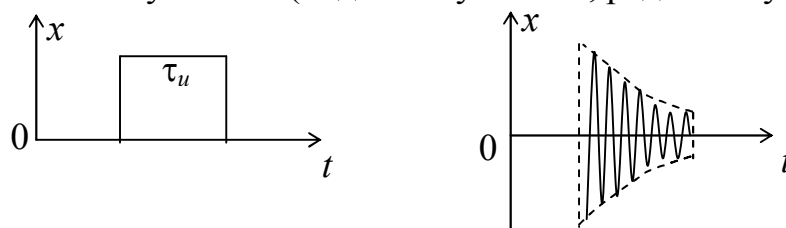


Рис. 1.10

г) По функции, описывающей сигнал:

- вещественные  $y=a(t)$ ;
- комплексные  $y=a(t)+ib(t)=z(t) e^{j\omega t}$ .

## 2. Спектральное представление сигналов

Очень часто математическое описание даже несложных по структуре детерминированных сигналов является весьма трудной задачей. Поэтому в радиоэлектронике используется прием, при котором реальные, сложные по структуре и форме сигналы заменяют набором идеализированных математических моделей, описываемых элементарными функциями.

Подобным образом можно упростить и обратную задачу – синтез сложных сигналов из совокупности простых.

Наиболее удобным способом описания исследуемого сигнала является его аналитическое представление с помощью системы некоторых взаимосвязанных элементарных функций времени. Представление сигнала элементарными функциями существенно упрощается, если выбрана ортонормированная система базисных функций.

### 2.1. Ортогональные сигналы

Пусть  $M = \{\vec{U}_1(t), \vec{U}_2(t), \dots, \vec{U}_n(t)\}$  – множество сигналов, представленных совокупностью векторов в пространстве сигналов.

Линейное пространство сигналов  $M$  является нормированным, если каждому вектору  $\vec{U}(t) \in M$  однозначно сопоставлено число  $\|\vec{U}\|$  – норма этого вектора, которая равна длине вектора.



Аксиомы

- 1) Норма неотрицательна, т.е.  $\|\vec{U}\| \geq 0$  или  $\|\vec{U}\| = 0$ , если  $\vec{U} = 0$ .
- 2)  $\|\alpha\vec{U}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{U}\|$  - для любого числа  $\alpha$ .
- 3) Если  $\vec{U}_1(t)$  и  $\vec{U}_2(t)$  - два вектора из  $M$  пространства, то  $\|\vec{U}_1 + \vec{U}_2\| \leq \|\vec{U}_1\| + \|\vec{U}_2\|$ .

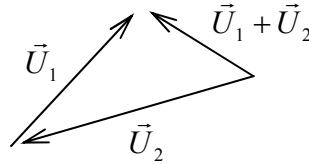


Рис. 2.1

Сигнал может меняться во времени по амплитуде (т.е. меняется длина вектора) и по фазе (т.е. меняется угол). Следовательно, для определения нормы надо интегрировать по времени, а так как  $U(t)$  может быть и положительным, и отрицательным, то надо интегрировать  $U^2$ .

В радиотехнике для вещественного сигнала

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt}, \quad (2.1)$$

для комплексного

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} U(t)U^*(t) dt}. \quad (2.2)$$

Квадрат нормы – энергия сигнала

$$E = \|\vec{U}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt. \quad (2.3)$$

Отметим, что в общем случае энергия суммы двух сигналов  $U$  и  $V$

$E = \int_{-\infty}^{\infty} (U + V)^2 dt = E_U + E_V + 2 \int_{-\infty}^{\infty} UV dt$ , где  $2 \int_{-\infty}^{\infty} UV dt = E_{UV}$  - взаимная энергия. То есть в отличие от самих сигналов их энергия не аддитивна, энергия суммарного сигнала содержит в себе так называемую взаимную энергию  $E_{UV}$ .

Два сигнала  $U$  и  $V$  называются ортогональными, если их скалярное произведение

$$(UV) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)V(t) dt = 0, \quad (2.4)$$

а значит и их взаимная энергия равна нулю.

Пример:

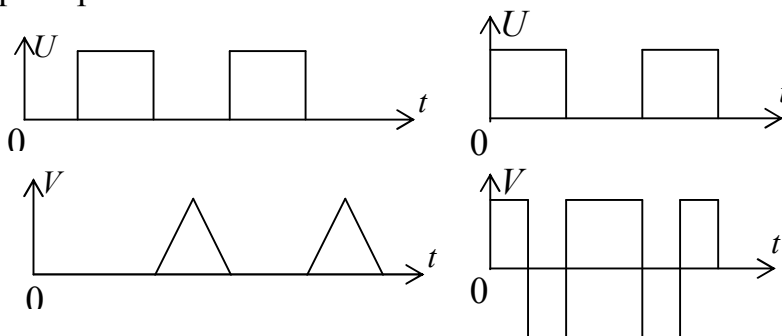


Рис. 2.2

Отметим некоторые свойства, характерные для скалярного произведения:



- косинус угла между сигналами

$$\cos \psi = \frac{(\vec{U}, \vec{V})}{\|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\|},$$

- неравенство Коши – Буняковского

$$|(\vec{U}, \vec{V})| \leq \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\|, \quad (2.5)$$

т.е. косинус угла между векторами в пространстве сигналов не превышает единицы, т.к. угол между сигналами должен лежать в интервале  $(0, 180^\circ)$ .

## 2.2. Обобщенный ряд Фурье

Предположим теперь, что на отрезке времени  $[t_1, t_2]$  в пространстве  $M$ , конечном или бесконечном, задана бесконечная система функций

$\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ , ортогональных друг другу и обладающих единичной нормой, т.е. скалярное произведение:

$$(l_i \cdot l_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (2.6)$$

Говорят, что при этом в пространстве сигналов задан ортонормированный базис.

Тогда можно разложить произвольный сигнал  $U(t) \in M$  в ряд

$$U(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i l_i(t), \quad (2.7)$$

обобщенный ряд Фурье сигнала  $U(t)$  в выбранном базисе.

Как найти коэффициенты ряда?

Возьмем базисную функцию  $l_k$  с произвольным номером  $k$ , умножим на нее обе части равенства (2.7) и затем проинтегрируем по времени:

$$\int_{t_1}^{t_2} U(t) l_k(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \int_{t_1}^{t_2} l_i l_k dt.$$

В виду ортогональности базиса  $\int_{t_1}^{t_2} l_i l_k dt = 1$ , если  $i=k$ , см. (2.6), следовательно,

$$C_k = \int_{t_1}^{t_2} U(t) l_k(t) dt. \quad (2.8)$$

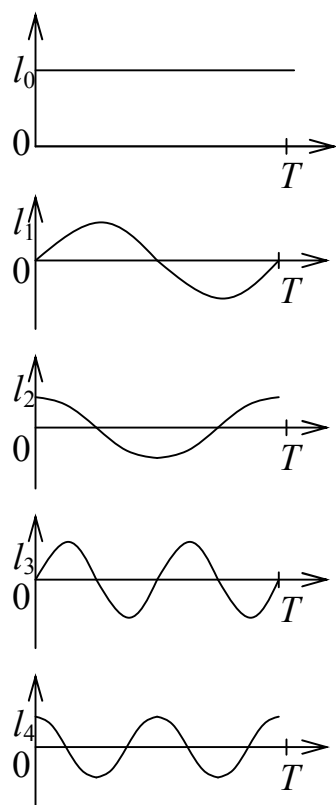
**Важно** то что, вместо того, чтобы изучать функцию в несчетном множестве точек, мы характеризуем ее счетной системой коэффициентов  $C_k$ .

Совокупность коэффициентов  $C_k$  называется спектром сигнала  $U(t)$  в ортогональной системе  $l_k$  и полностью определяет сигнал  $U(t)$ .

**Важное свойство:** При заданной системе функций  $l_i$  и фиксированном числе слагаемых ряда (2.7) он обеспечивает наилучшую аппроксимацию (в смысле минимума среднеквадратичной ошибки) данной функции  $U(t)$ .

Одной из наиболее важных систем взаимно ортогональных функций является система гармонических функций на отрезке  $[0; T]$ .





$$\begin{aligned}
 l_0 &= \frac{1}{\sqrt{T}}; \\
 l_1 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T} = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_1 t; \\
 l_2 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T} = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_1 t; \\
 &\dots\dots\dots \\
 l_{2m-1} &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi mt}{T} = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_1 mt; \\
 l_{2m} &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi mt}{T} = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_1 mt; \\
 \omega_1 &= \frac{2\pi}{T}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Рис. 2.3

Важность системы гармонических функций для радиотехники обусловлена рядом причин:

- инвариантность относительно преобразований линейными электрическими цепями;
- простота генерации;
- позволяет использовать символический метод анализа систем;
- собственные функции резонансных систем.

### 2.3. Периодические сигналы и ряды Фурье

Периодическим сигналом называется любой сигнал, повторяющийся через регулярные интервалы времени (рис. 2.4) и удовлетворяющий условию (2.10).

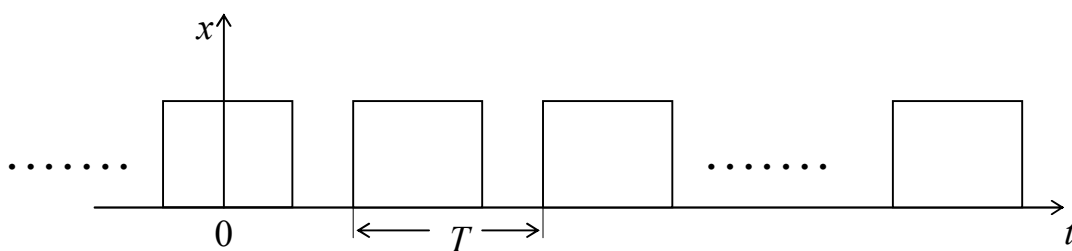


Рис. 2.4

$$U(t) = U(t \pm nT), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.10}$$



Итак, на отрезке  $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$  зададим ортонормированный базис (2.9), образованный гармоническими функциями с кратными частотами.

Любая функция из этого базиса удовлетворяет условию периодичности (2.10), поэтому, выполнив ортогональное разложение сигнала  $U(t)$

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n l_n(t) \quad (2.11)$$

в этом базисе, вычислим, в соответствии с (2.7), коэффициенты  $C_n$

$$C_n = (U, l_n) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) l_n(t) dt, \quad (2.12)$$

получим, в соответствии с (2.7), разложение  $U(t)$ .

Ряд вида (2.11) с коэффициентами (2.12) называется рядом Фурье периодического сигнала.

### 2.3.1. Тригонометрическая форма ряда Фурье

Введем основную частоту  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  последовательности, образующей периодический сигнал. Вычисляя коэффициенты разложения по формуле (2.12) с учетом (2.9), получим:

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \frac{1}{\sqrt{T}} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) dt; \\ C_1 &= \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_1 t dt = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \sin \omega_1 t dt; \\ C_2 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \cos \omega_1 t dt \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Отсюда: подставив в (2.11) коэффициенты (2.13) и (2.9), имеем:

$$\begin{aligned} U(t) &= \left( \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) dt \right) \frac{1}{\sqrt{T}} + \left( \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \sin \omega_1 t dt \right) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_1 t + \\ &+ \left( \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \cos \omega_1 t dt \right) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_1 t + \dots = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) dt + \left( \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \sin \omega_1 t dt \right) \sin \omega_1 t + \\ &+ \left( \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \cos \omega_1 t dt \right) \cos \omega_1 t + \dots \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) dt;$$



$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \cos n\omega_1 t dt ; \quad (2.14)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \sin n\omega_1 t dt .$$

Из полученного выше выражения для ряда Фурье имеем

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t). \quad (2.15)$$

Итак:

1) В общем случае сложный периодический сигнал может иметь постоянную составляющую и бесконечный набор гармонических колебаний с частотами  $\omega_i = i\omega_1$ .

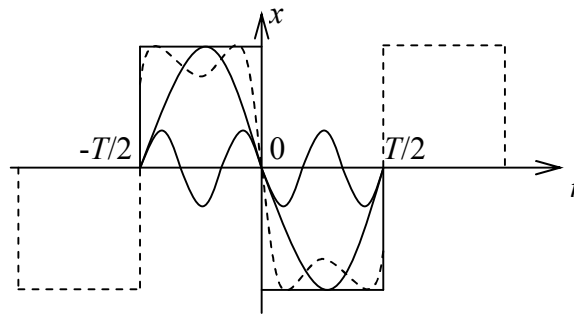


Рис.2.5

Отметим, чем больше составляющих  $i\omega_1$ , тем ближе сумма составляющих к истинному сигналу (см. рис. 2.5).

2) Четный сигнал имеет только косинусоидальные слагаемые (т.к.  $b_n$  обращаются в ноль), нечетный — только синусоидальные (т.к.  $a_n$  обращаются в ноль).

Каждую гармоническую составляющую можно описать ее амплитудой  $A_n$  и начальной фазой  $\varphi_n$ , т.е. спектр периодического сигнала линейчатый (см. рис. 2.6).

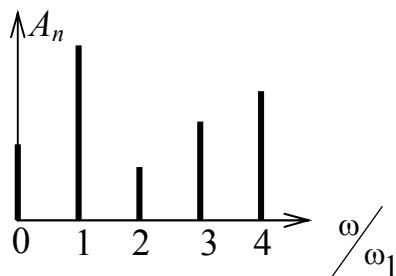
$$a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = A_n \sin \varphi_n,$$

$$\text{где } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}.$$

Тогда

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n). \quad (2.16)$$

Амплитудный спектр



Фазовый спектр

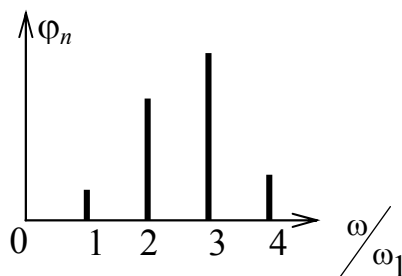


Рис. 2.6



### 2.3.2. Комплексная форма ряда Фурье

Спектральное разложение периодического сигнала можно выполнить, используя систему базисных функций, состоящую из экспонент с мнимыми показателями:

$$\{l_n\} = \left\{ \frac{\exp(jn\omega_1 t)}{\sqrt{T}} \right\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.17)$$

Действительно, функции этой системы периодичны с периодом  $T$  ортонормированны на отрезке времени  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ .

#### Доказательство ортонормированности

$$\begin{aligned} (l_m, l_n) &= \int_{-T/2}^{T/2} l_m(t) l_n^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(jm\omega_1 t) \exp(-jn\omega_1 t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp\{j(m-n)\omega_1 t\} dt; \end{aligned}$$

сделаем замену переменных:

$$\omega_1 t = x, \quad t = \frac{x}{\omega_1}, \quad \text{так как } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{то } t = \frac{xT}{2\pi}, \quad dt = \frac{T}{2\pi} dx$$

при  $t = -\frac{T}{2}$ ,  $x = -\pi$ , при  $t = \frac{T}{2}$ ,  $x = \pi$ , получим

$$(l_m, l_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)x} dx = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases}.$$

Ряд Фурье (2.11) произвольного периодического сигнала в данном случае принимает вид:

$$\dot{U}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n l_n(t), \quad \text{или с учетом (2.17)}$$

$$U(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}.$$

Найдем коэффициенты разложения  $C_n$ . Для этого левую и правую часть домножим на  $\frac{e^{-jk\omega_1 t}}{\sqrt{T}}$  и возьмем интеграл  $\int_{-T/2}^{T/2}$ . Получим

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

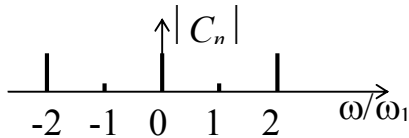
Обычно используют несколько иную запись:



$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \\ C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{aligned} \quad (2.18)$$

Выражения (2.18) представляют ряд Фурье в комплексной форме. Спектр сигнала в соответствии с этими выражениями содержит компоненты на положительной и отрицательной полуоси, причем

$$C_{-n} = C_n^* \quad (2.19)$$



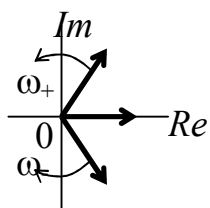
При переходе к тригонометрической форме записи получим

$$U(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cos(n\omega_1 t - \varphi_n) \quad (2.20)$$

Из сравнения (2.16) и (2.20) видно, что

$$A_n = 2|C_n|, \quad a_n = 2C_{nc} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) \cos n\omega_1 t dt,$$

$$b_n = 2C_{ns} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) \sin n\omega_1 t dt.$$



После перехода к тригонометрической форме понятие “отрицательная” частота теряет смысл, т.к. это понятие не физическое, а математическое, вытекающее из способа представления комплексных чисел. Положительной частоте соответствует вектор, вращающийся против часовой стрелки, а отрицательной частоте — вектор, вращающийся по часовой стрелке.

## 2.4. Спектральное представление непериодических сигналов

Пусть  $U(t)$  одиночный импульс конечной длительности. Создадим периодическую последовательность с периодом  $T$  и представим ее комплексным рядом Фурье (см.2.18).

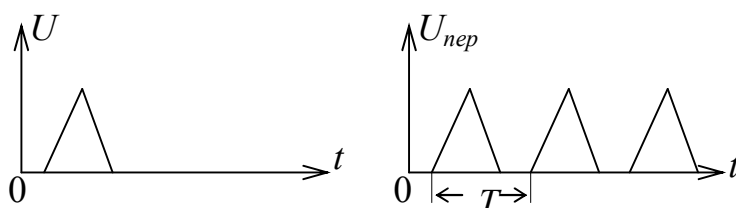


Рис. 2.7



$$\dot{U}_{nep}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2.21)$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{U}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.22)$$

Для того, чтобы перейти к спектральному представлению единичного импульса, устремим  $T \rightarrow \infty$ .

Из (2.22) видно, что при  $T \rightarrow \infty$  получаем:

- бесконечно-малые амплитудные коэффициенты  $C_n$  (из-за наличия  $T$  в знаменателе);
- частоты соседних гармоник  $n\omega_1$  и  $(n+1)\omega_1$  становятся сколь угодно близкими (т.к.  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ );
- число гармоник, входящих в ряд Фурье, становится бесконечно большим, т.к. при  $T \rightarrow \infty$ , основная частота  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ , т.е. спектр становится сплошным.

Подставив (2.22) в (2.21), получим:

$$\dot{U}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dot{U}(x) e^{-jn\omega_1 x} dx \right) e^{jn\omega_1 t} \frac{\omega_1}{2\pi},$$

т.к.  $T \rightarrow \infty$ , то  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ , поэтому в этом выражении можно заменить  $\omega_1 \rightarrow d\omega$ ;  $n\omega_1 \rightarrow \omega$ ;  $\sum \rightarrow \int$ . Таким образом, переходим к двойному интегралу Фурье:

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(x) e^{-j\omega x} dx \right] d\omega.$$

Здесь обозначим  $\int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(x) e^{-j\omega x} dx = \dot{S}(\omega)$

или

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.23).$$

$\dot{S}(\omega)$  - спектральная плотность сигнала  $\dot{U}(t)$  или прямое преобразование Фурье, или Фурье-образ сигнала.

Отсюда:



$$\boxed{\dot{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.} \quad (2.24)$$

Это обратное преобразование Фурье.

### Физический смысл $\dot{S}(\omega)$

Спектральная плотность – это отношение комплексной амплитуды малого интервала частот вблизи частоты, равной  $\pm f_0$ , к длине этого интервала. Причем вклад дают как положительные, так и отрицательные частоты, образующие окрестность  $\pm f_0$ .

Спектральная плотность — комплекснозначная функция частоты, одновременно несущая информацию об амплитуде и о фазе элементарных синусоид.

Таким образом, из (2.23) и (2.24) следует, что один и тот же сигнал допускает две совершенно равноправные математические модели — временную и частотную.

Условия существования  $\dot{S}(\omega)$  - это абсолютная интегрируемость сигнала, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{U}(t)| dt < \infty. \quad (2.25)$$

Можно записать  $\dot{S}(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |\dot{S}(\omega)| e^{-j\Theta(\omega)}$ , где:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \cos \omega t \cdot dt;$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \sin \omega t \cdot dt.$$

Тогда амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) сигнала –  $|\dot{S}(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ ;

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) сигнала -  $\Theta(\omega) = \text{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$ .



### 2.4.1. Основные свойства преобразований Фурье

Итак, между сигналом  $\dot{U}(t)$  и его спектральной плотностью  $\dot{S}(\omega)$  существует однозначное соответствие, устанавливаемое соотношениями (2.23) и (2.24). Для практических целей важна связь между различными преобразованиями сигнала и соответствующими изменениями спектра. Рассмотрим основные из этих преобразований.

1) Сложение сигналов.

Если

$$\dot{U}(t) = \dot{U}_1(t) + \dot{U}_2(t) + \dots + \dot{U}_n(t),$$

то

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) + \dot{S}_2(\omega) + \dots + \dot{S}_n(\omega), \quad (2.26)$$

т.е. преобразование Фурье линейно.

Пример: сигнал+помеха

2) Сдвиг сигналов во времени (теорема запаздывания).

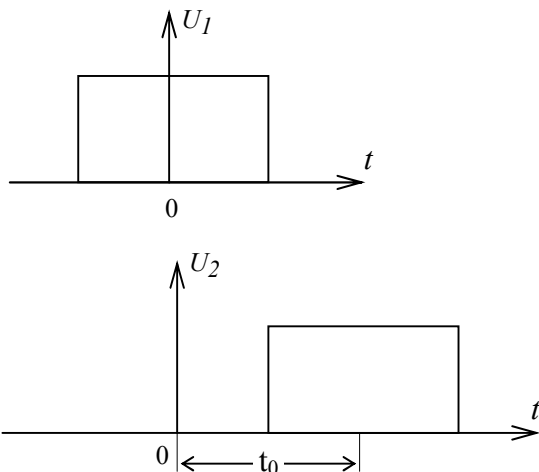


Рис.2.8

$$\dot{U}_2(t) = \dot{U}_1(t - t_0).$$

$$\dot{S}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt =$$

обозначим  $\theta = t - t_0$ ,  $dt = d\theta$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(\theta) e^{-j\omega(\theta+t_0)} d\theta = e^{-j\omega t_0} \dot{S}_1(\omega);$$

$$\dot{S}_2(\omega) = e^{-j\omega t_0} \dot{S}_1(\omega) \quad (2.27)$$

Отсюда видно, что АЧХ сигнала остается постоянной, но меняется его фазовая характеристика.

Пример: фильтрация РЛС сигналов.

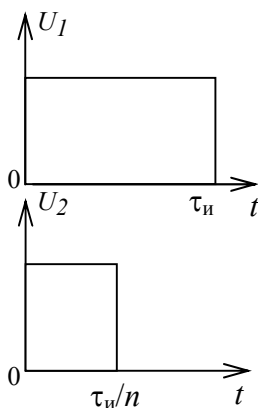


Рис.2.9

3) Изменение масштаба времени.

$$\dot{U}_2(t) = \dot{U}_1(nt),$$

$n > 1$  – сжатие сигнала,

$n < 1$  – расширение сигнала

$$\dot{S}_2(\omega) = \int_0^{\tau_u/n} \dot{U}_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau_u/n} \dot{U}_1(nt) e^{-j\omega t} dt.$$

После замены переменных  $nt = \theta$ ,  $dt = d\frac{\theta}{n}$  отсюда имеем



$$\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{n} \int_0^{\tau_u} \dot{U}_1(\theta) e^{-j\frac{\omega}{n}\theta} d\theta = \frac{1}{n} \dot{S}_1\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

$$\boxed{\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{n} \dot{S}_1\left(\frac{\omega}{n}\right)}, \quad (2.28)$$

т.е. при сжатии сигнала в  $n$  раз на временной оси во столько же раз расширяется его спектр и уменьшается интенсивность спектральной плотности.

Из этого свойства и примеров по определению спектральных плотностей импульсов видно, что чем меньше длительность сигнала, тем шире его спектр.

Для установления количественных соотношений между указанными параметрами необходимо определиться с понятием длительности сигнала и ширины его спектра. В большинстве случаев выбор произвольный.

Например:

- для прямоугольного импульса ширина спектра принимается как основание главного лепестка  $f_s \tau_u = 1$ ;
- для колоколообразного импульса ширина берется на уровне 0,606 от максимального значения;
- можно также использовать энергетический критерий (например 90% энергии и т.д.). В результате  $f_s \tau_u = const$  и зависит от формы импульса. Минимальная  $f_s \tau_u = 0,5$  у колоколообразного (гауссового) импульса.

Пример: спектральный анализ с временной компрессией.

#### 4) Произведение двух сигналов.

$$U(t) = f(t) \cdot g(t),$$

где

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Найдем прямое преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) e^{jxt} dx \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega-x)t} dt \right] dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \dot{F}(\omega-x) dx, \end{aligned}$$

т.е.

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x) \dot{F}(\omega-x) dx} \quad (2.29)$$

- свертка спектров сомножителей.



Примеры: преобразование частоты; исследование флуктуаций; получение спектра радиоимпульса как произведение синусоидального сигнала  $\sin \omega t$  на прямоугольный импульс.

5) Спектральная плотность производной сигнала и его интеграла.

$$f(t) = \frac{dU}{dt},$$

$$\dot{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dt} e^{-j\omega t} dt.$$

Интегрируя по частям  $\int U'V dt = UV - \int UV' dt$ , получим

$$\dot{F}(\omega) = U(t) \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Если выполняется условие  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(t) = 0$ , то

$$\boxed{\dot{F}(\omega) = j\omega \dot{S}(\omega)}, \quad (2.30)$$

где  $j\omega = \omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$  (т.к. по формуле Эйлера  $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$ );

$\dot{S}(\omega) = |\dot{S}(\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$ ,  $|\dot{S}(\omega)|$  - амплитудный спектр и  $\varphi(\omega)$  - фазовый спектр исходного сигнала  $U(t)$ , или

$$\boxed{\dot{F}(\omega) = |\omega \dot{S}(\omega)| e^{-j\left[\varphi(\omega) - \frac{\pi}{2}\right]}}, \quad (2.31)$$

т.е. изменится амплитудный спектр, а фазовый спектр меняется на  $\frac{\pi}{2}$  на всех частотах.

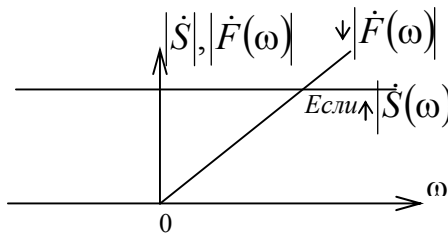


Рис. 2.10

Причем дифференцирование поднимает верхние частоты и занижает низкие частоты.

Аналогично можно найти спектр интеграла  $g(t) = \int U(t) dt$ .

Представив  $U(t) = \frac{dg}{dt}$ , следовательно,  $\dot{S}(\omega) = j\omega \dot{G}(\omega)$ , отсюда

$$\boxed{\dot{G}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \dot{S}(\omega) = \left| \frac{\dot{S}(\omega)}{\omega} \right| e^{-j\left[\varphi(\omega) + \frac{\pi}{2}\right]}}, \quad (2.32)$$



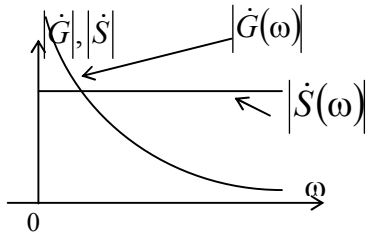


Рис. 2.11

## б) Теорема Парсеваля.

Известно, что энергия колебания на единичном сопротивлении  $E = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt$ .

Найдем соотношение, позволяющее определить энергию колебания  $U(t)$  посредством использования его спектра. Для этого воспользуемся прямым преобразованием Фурье

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Умножим обе части данного равенства на  $U(t)$  и проинтегрируем в бесконечных пределах

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega,$$

но

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{j\omega t} dt = \dot{S}^*(\omega),$$

$$\text{таким образом } E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \dot{S}^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega.$$

Т.к. квадрат модуля есть четная функция  $\omega$ , то, удвоив значение интеграла, можно проводить интегрирование в пределах  $0 \rightarrow \infty$ .

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.33)$$

Из этого соотношения следует, что на бесконечно малый участок частот  $d\omega$

$$\text{приходится энергия } \Delta E = \frac{|\dot{S}(\omega)|^2}{\pi} d\omega = dE \cdot d\omega,$$

$|\dot{S}(\omega)|^2$  — энергетический спектр сигнала.

Величина  $dE = \frac{|\dot{S}(\omega)|^2}{\pi}$  — спектральная плотность энергии колебания  $U(t)$ .

Полная энергия сигнала равна сумме энергий всех его частотных составляющих.

Пример - спектральный анализатор.



### 7) Обобщенная формула Рэлея.

Пусть два сигнала  $U(t)$  и  $V(t)$  (в общем случае комплексные) определены своими обратными преобразованиями Фурье:

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v(\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad \dot{V}^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega,$$

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Найдем скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\dot{U}, \dot{V}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \dot{V}^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) \left[ \dot{S}_v^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v^*(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } (\dot{U}, \dot{V}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega) \dot{S}_v^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u \dot{S}_v)$$

Итак,

$$\boxed{(\dot{U}, \dot{V}) = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u \dot{S}_v)} \text{ — Формула Рэлея} \quad (2.34)$$

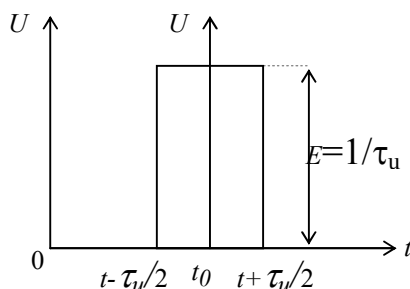
Скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента  $\frac{1}{2\pi}$  равно скалярному произведению их спектральных плотностей.

Пример - ортогональность неперекрывающихся по спектру сигналов.

### 2.4.2 Спектральная плотность некоторых неинтегрируемых сигналов

Математические модели многих сигналов не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости (2.25) и поэтому метод преобразований Фурье в обычном виде к ним не применим. Однако можно говорить о спектральных плотностях таких сигналов, если допустить, что эти плотности описываются обобщенными функциями.

#### 1) Спектральная плотность $\delta$ функции.



$$U(t) = \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

Рис. 2.12



$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0},$$

$$\boxed{S(\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega t_0}}, \quad (2.35)$$

$|S(\omega)| = 1$ . (см. рис. 2.13)

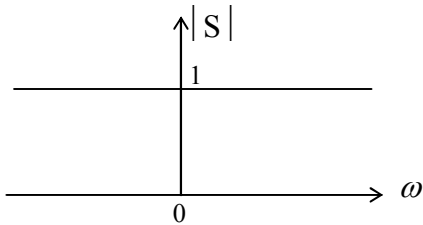


Рис. 2.13

По свойству преобразования Фурье о смещенном во времени сигнале можно представить  $\delta$ -функцию:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{или} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} d\omega.$$

Качественно можно эту формулу обосновать следующим образом: воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Мы можем представить приведенный выше интеграл в виде суммы большого числа синусоид и косинусоид различных частот.

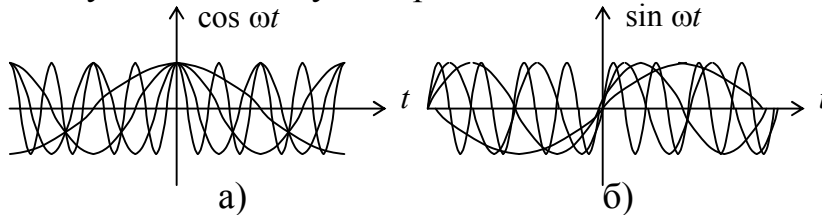


Рис. 2.14

Как видно из рисунка 2.14-б, в любой момент времени  $t$ , отличный от  $t=0$ , число положительных составляющих  $\sin \omega t$  будет равно числу отрицательных составляющих и, следовательно, их вклады могут привести к разрушительной интерференции или полной взаимной компенсации. При  $t=0$ , однако, все косинусоидальные составляющие равны  $+1$ ; их вклад суммируется, создавая в начале координат бесконечно большой пик (см. рис. 2-14-а).

2) Спектральная плотность постоянного во времени сигнала.

$$U(t) = E = \text{const},$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \delta(\omega),$$

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = 2\pi E \delta(\omega)}. \quad (2.36)$$

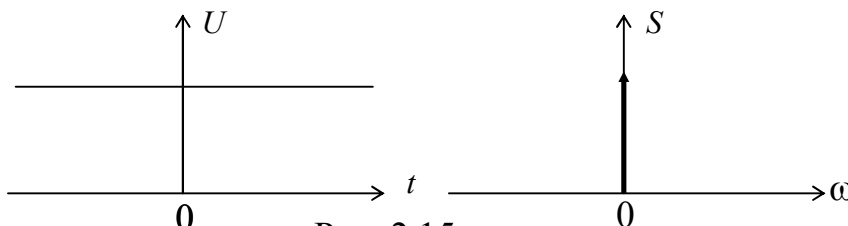


Рис. 2.15



- 3) Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала  $U(t) = \exp(j\omega_0 t)$  может быть определена следующим образом:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_0),$$

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)}. \quad (2.37)$$

Спектр несимметричен относительно  $\omega=0$ .

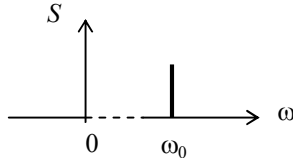


Рис. 2.16

- 4) Спектральную плотность гармонического сигнала  $U(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$  определим воспользовавшись линейностью преобразования Фурье и спектральной плотностью комплексной экспоненты.

$$\boxed{\dot{S}(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]}. \quad (2.38)$$

Спектр симметричен относительно  $\omega=0$ .

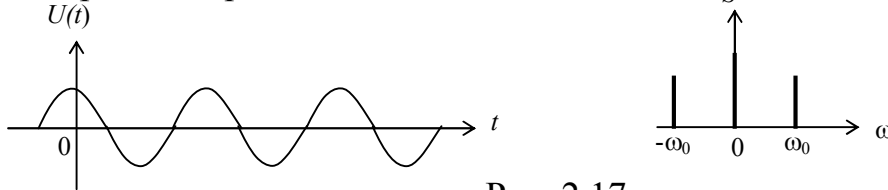


Рис. 2.17

## 2.5. Спектральная плотность периодического сигнала

Найдем спектральную плотность периодического  $U(t)$  сигнала с периодом  $T$  —  $U(t) = U(t \pm T)$ .

Экспоненциальный ряд Фурье для периодического сигнала  $U(t)$   $U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$ , где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  — основная частота,  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Коэффициенты

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

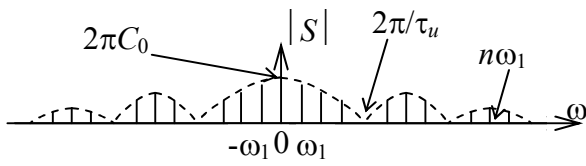
Но при этом, по определению, спектральная плотность

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - n\omega_1)t} dt = \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1), \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \boxed{\dot{S}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1)}. \quad (2.39)$$



Таким образом, спектральная плотность периодического сигнала представляется на оси частот последовательностью  $\delta$  — функций, существующих на частотах  $\omega = n\omega_1$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), с интенсивностью (площадью)  $2\pi C_n$ , определяемой видом одиночного сигнала  $U(t)$ .



На рис. 2.18 показан спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов (пунктиром — спектр одиночного видеоимпульса)

Рис.2.18

Если сигнал — это периодическая последовательность  $\delta$  импульсов, то

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T}. \quad \text{Отсюда (из 2.39) спектр периодической}$$

последовательности  $\delta$  импульсов равен

$$\dot{S}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1). \quad (2.40)$$

Этот спектр изображен на рис. 2.19.

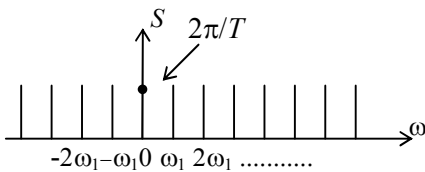


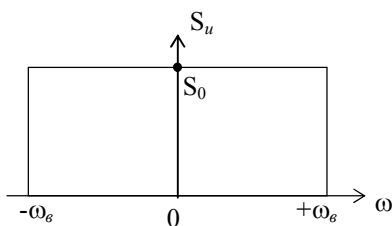
Рис. 2.19

### 3. Дискретизация сигнала

При переходе от аналогового сигнала к цифровому осуществляются три специфических преобразования: дискретизация по времени, квантование по уровню и кодирование. Под дискретизацией понимают процесс замены непрерывного сигнала дискретной последовательностью отсчетов через интервал  $\Delta t$ .

#### 3.1. Ортогональные сигналы с ограниченным спектром

Рассмотрим идеальный низкочастотный (НЧ) сигнал, т.е. сигнал  $U(t)$ , имеющий постоянную вещественную спектральную плотность в диапазоне  $-\omega_g, +\omega_g$ .



$$S_u(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_g, \\ S_0, & -\omega_g \leq \omega \leq \omega_g, \\ 0, & \omega > \omega_g. \end{cases} \quad (3.1)$$

Рис. 3.1



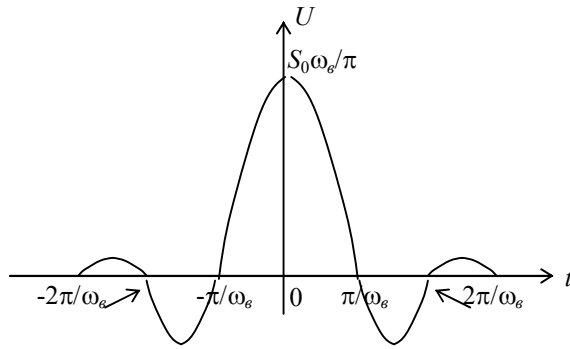


Рис. 3.2

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{+\omega_g} e^{j\omega t} d\omega;$$

т.к.  $\int_{-\omega_g}^{+\omega_g} e^{j\omega t} d\omega = 2 \frac{\sin \omega_g t}{t}$ , то

$$U(t) = \frac{S_0 \omega_g}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_g t}{\omega_g t}. \quad (3.2)$$

Если НЧ сигнал запаздывает на  $\Delta t$ , то  $V(t) = \frac{S_0 \omega_g}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_g (t - \Delta t)}{\omega_g (t - \Delta t)}$ , (3.2')

тогда по свойству преобразования Фурье задержанного сигнала имеем

$$\dot{S}_v(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_g, \\ S_0 e^{-j\omega \Delta t}, & -\omega_g \leq \omega \leq \omega_g, \\ 0, & \omega > \omega_g. \end{cases} \quad (3.1')$$

Рассмотрим эти два идеальных НЧ сигнала  $\dot{U}(t)$  и  $\dot{V}(t)$ . Оба имеют одинаковые параметры  $S_0$  и  $\omega_g$ , однако сигнал  $\dot{V}(t)$  запаздывает по отношению к сигналу  $\dot{U}(t)$  на время  $\Delta t$ , так, что его спектральная плотность  $\dot{S}_v(\omega) = S_u(\omega) e^{-j\omega \Delta t}$ .

Скалярное произведение этих сигналов, полученное по обобщенной формуле Рэлея (2.34),  $(\dot{U}\dot{V}) = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u \dot{S}_v^*)$ ,  $(UV) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u \dot{S}_v^* d\omega = \frac{S_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} e^{j\omega \Delta t} d\omega = \frac{S_0^2 \omega_g}{\pi} \frac{\sin \omega_g \Delta t}{\omega_g \Delta t}$ .

Обозначим  $\Delta t = t_k$ .

Скалярное произведение обращается в нуль, и эти сигналы оказываются ортогональными, если временной сдвиг между ними удовлетворяет условию  $\omega_g t_k = k\pi$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $\Delta t = t_k = k \frac{\pi}{\omega_g}$ .

Минимально возможный сдвиг, приводящий к ортогонализации, получается при  $k = \pm 1$ . Причем, максимум одного сигнала всегда совпадает с нулем другого.

$$t_1 = \pm \frac{\pi}{\omega_g} = \pm \frac{1}{2F_g}. \quad (3.3)$$

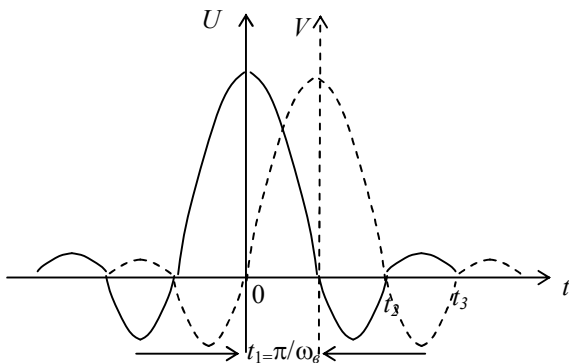


Рис. 3.3



Важно — удалось не просто добиться ортогональности двух сигналов. Указан путь построения бесконечного ортогонального базиса, который может служить координатной системой для разложения произвольного сигнала со спектром, ограниченным частотой  $\omega_g$ .

### 3.2. Теорема Котельникова для сигнала с ограниченным спектром

Для создания ортонормированного базиса достаточно рассмотреть функцию  $l_0(t) = A \frac{\sin \omega_g t}{\omega_g t}$ , создающую ортогональный базис и определить амплитуду  $A$ , чтобы норма была единична. По определению, энергия сигнала равна квадрату нормы  $E = \|l_0\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} l_0^2 dt = \frac{A^2}{\omega_g^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\omega_g t}{t^2} dt = \frac{A^2}{\omega_g^2} \pi \omega_g = \frac{\pi A^2}{\omega_g}$ .

Итак, функция  $l_0(t)$  будет ортонормированной, т.е. ( $E=1$ ), если  $A = \sqrt{\frac{\omega_g}{\pi}}$ .

Бесконечная совокупность функций

$$l_k(t, \omega_g) = \sqrt{\frac{\omega_g}{\pi}} \frac{\sin \omega_g (t - t_k)}{\omega_g (t - t_k)}, \quad (3.4)$$

где  $t_k = k \frac{\pi}{\omega_g} = k \frac{1}{2F_g}$ , образуют базис Котельникова в линейном пространстве НЧ сигналов со спектрами, ограниченными сверху значением  $\omega_g$ . Отдельная функция  $l_k$  называется отсчетной функцией базиса Котельникова.

Если  $\dot{U}(t)$  — произвольный сигнал, спектральная плотность которого отлична от нуля лишь в полосе частот  $-\omega_g \leq \omega \leq \omega_g$ , то его можно разложить в обобщенный ряд Фурье по базису Котельникова

$$\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k l_k(t, \omega_g).$$

Коэффициентами ряда служат, как известно, скалярные произведения разлагаемого сигнала и  $k$ -ой отсчетной функции  $C_k = (U(t) \cdot l_k)$ . По обобщенной

формуле Рэлея (2.34)  $C_k = \frac{1}{2\pi} (\dot{S}_u(\omega) \cdot \dot{S}_{l_k}(\omega))$ . Т.е.

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega) \dot{S}_{l_k}^*(\omega) d\omega \quad (3.5)$$

Коэффициенты  $C_k$  находим по аналогии с выражениями (3.2') и (3.1') т.к.  $l_k(t) = \sqrt{\frac{\omega_g}{\pi}} \frac{\sin \omega_g (t - t_k)}{\omega_g (t - t_k)}$ , где  $t_k = \frac{k}{2F_g}$ ,

то для  $k$ -ой отсчетной функции имеем  $\dot{S}_{l_k} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \exp\{-j\omega t_k\}$  (здесь, в соответствии с теоремой запаздывания, экспонента показывает сдвиг отсчетной



функции во времени). Тогда из (3.5) имеем

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \dot{S}_u(\omega) \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \exp(j\omega t_k) d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \dot{S}_u(\omega) \cdot [\exp j\omega t_k] d\omega \right\}.$$

Т.к.  $t_k = \frac{k\pi}{\omega_g}$  —  $k$ -ая отсчетная точка, то фигурная скобка есть не что иное, как  $\dot{U}(t_k)$ .

Таким образом,  $C_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_g}} \dot{U}(t_k)$ . Следовательно, т.к.  $\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k l_k(t)$ , используя (3.4),

имеем ряд Котельникова

$$\dot{U}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \frac{\sin \omega_g(t-t_k)}{\omega_g(t-t_k)}. \quad (3.6)$$

**Теорема:** Произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше  $F_g$  (Гц), может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени  $\Delta t = 1/2 F_g$  (с).

### 3.3. Спектр дискретизированного сигнала

Дискретизированный сигнал можно рассматривать как результат умножения первоначального непрерывного сигнала  $U(t)$  на сигнал  $i(t)$ , состоящий из бесконечного числа единичных  $\delta$ -импульсов

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_\delta),$$

где  $T_\delta$  — период дискретизации.

Эта операция дает дискретизированный сигнал

$$U_i(t) = U(t) \cdot i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(nT_\delta) \cdot \delta(t - T_\delta).$$

Воспользовавшись теоремой о свертке

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega - g) \cdot S_i(g) dg,$$

где  $S_u(\dots)$  — преобразование Фурье от функции  $U(t)$ ,  $S_i(\dots)$  — преобразование Фурье от функции  $i(t)$ .

Преобразование Фурье ряда, состоящего из  $\delta$ -импульсов, как было показано выше (см. (2.38)),

$$S_i(g) = \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(g - n\omega_1) = \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(g - \frac{2\pi n}{T_\delta}\right),$$

отсюда

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega - g) \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(g - \frac{2\pi n}{T_\delta}\right) dg = \frac{2\pi}{T_\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_u\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_\delta}\right).$$

Следовательно, дискретизированный, или импульсно-модулированный сигнал  $U_i(t)$  имеет периодическое с периодом  $F_\delta = \frac{1}{T_\delta}$  преобразование Фурье  $S(\omega)$ ,



интенсивность которого уменьшается в  $T_\delta$  раз. Если спектр  $S_u(\omega)$  при  $F > F_\delta$ , обращается в ноль и  $T_\delta \leq \frac{1}{2F_\delta}$  или  $F_\delta \geq 2F_\delta$ , то  $S(\omega)$  является просто периодически повторяемой функцией  $S_u(\omega)$  (рис.3.5). Если  $T_\delta > \frac{1}{2F_\delta}$ , то имеет место эффект наложения частот (рис. 3.6).

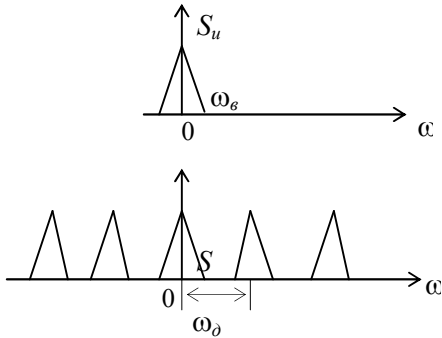


Рис. 3.5

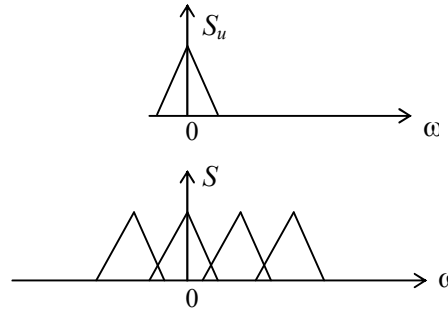


Рис. 3.6

#### 4. Модулированные сигналы и их спектры

Для передачи информации на расстояние применяются сигналы, эффективно излучаемые с помощью антенных устройств и способные распространяться в виде свободных радиоволн в среде, разделяющей источник информации от получателя информации.

Таковыми сигналами являются высокочастотные колебания. Передаваемая информация должна быть как-то заложена в высокочастотное колебание, называемое несущим. Частота  $\omega_0$  этого колебания выбирается в зависимости от расстояния, условий распространения радиоволн и других факторов. Но в любом случае частота  $\omega_0$  должна быть велика по сравнению с наивысшей частотой  $\Omega_m$  спектра передаваемого сообщения. Любой сигнал можно, поэтому, трактовать как «узкополосный» процесс даже при передаче широкополосных сообщений.

##### 4.1. Сигналы с амплитудной модуляцией (АМ)

Физически процесс управления колебанием и называется модуляцией. Чаще всего в качестве несущего используют простое гармоническое колебание  $V = U \cos(\omega t + \varphi)$ .

Если переменной оказывается амплитуда сигнала  $U(t)$ , а остальные параметры  $\omega$  и  $\varphi$  неизменны, имеет место амплитудная модуляция несущего колебания

$$u_{AM} = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4.1)$$

где  $U(t)$  — огибающая,  $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  — высокочастотное заполнение.



Причем при двухполосной передаче сигнал можно представить

$$U(t) = U_0(1 + mX(t)), \quad (4.2)$$

где  $m$  — коэффициент модуляции,  $X(t)$  — передаваемое сообщение,  $U_0$  — амплитуда несущей в отсутствии модуляции.

Рассмотрим простейший случай однотональной модуляции.

Однотональная амплитудная модуляция — модуляция гармоническим колебанием частотой  $\Omega$

$$\begin{aligned} U_{AM}(t) &= U_0[1 + m \cdot \cos(\Omega t + \phi)]\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_0 m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \phi] + \\ &\quad + \frac{U_0 m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \phi]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что однотональная модуляция симметрична относительно несущего колебания.

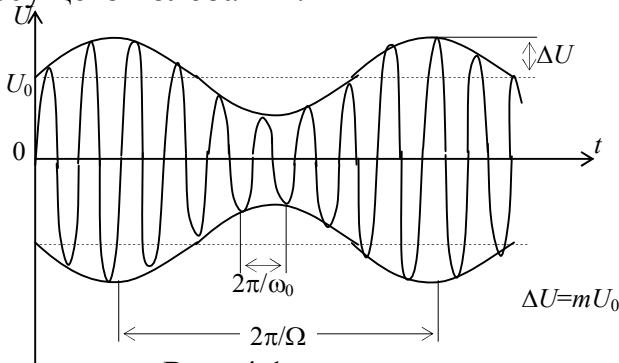


Рис. 4.1

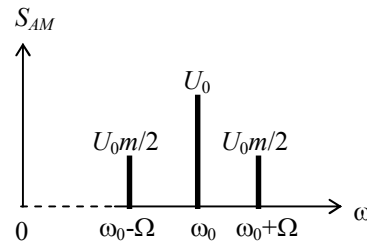


Рис. 4.2

Из рис. 4.1 видно, что  $m = \frac{\Delta U}{U_0}$ . При неискаженной модуляции ( $m \leq 1$ )

амплитуда колебания изменяется в пределах  $U_{min} = U_0(1-m)$  до максимальной  $U_{max} = U_0(1+m)$ .

На практике однотональные АМ сигналы используются редко. Гораздо более реален случай, когда модулирующий НЧ сигнал имеет сложный спектральный состав. Математической моделью такого НЧ сигнала может быть, например, тригонометрическая сумма

$$X(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cos(\Omega_i t + \phi_i). \quad (4.4)$$

Здесь частоты  $\Omega_i$  образуют упорядоченную возрастающую последовательность  $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_N$ , в то время как амплитуды  $\alpha_i$  и начальные фазы  $\phi_i$  произвольны.

Подставив (4.4) в (4.1), получим

$$u(t) = U_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^N m \alpha_i \cos(\Omega_i t + \phi_i) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Введем совокупность парциальных коэффициентов модуляции

$$m_i = m \alpha_i$$

и запишем аналитическое выражение многотонального АМ-сигнала



$$u(t) = U_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^N m_i \cos(\Omega_i t + \phi_i) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.5)$$

Спектральное разложение получается аналогично (4.3):

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \sum_{i=1}^N \frac{U_0 m_i}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi + \phi_i] + \sum_{i=1}^N \frac{U_0 m_i}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi - \phi_i]. \quad (4.6)$$

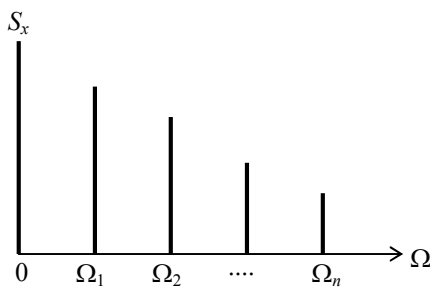


Рис. 4.3

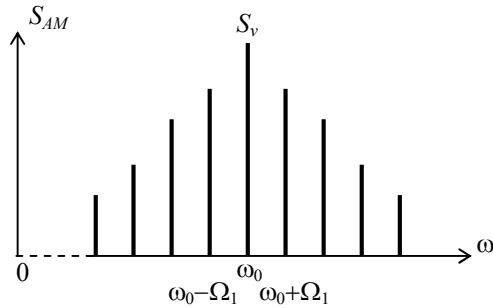


Рис. 4.4

Итак, спектр сложномодулированного АМ колебания помимо несущего содержит группы верхних и нижних боковых колебаний.

#### 4.1.1. Балансная амплитудная модуляция (подавленная несущая)

Значительная доля мощности обычного АМ сигнала сосредоточена в несущем колебании. Для более эффективного использования можно формировать АМ сигнал с подавленной несущей:

$$\begin{aligned} V_{БМ} &= U_0 m \cos(\Omega t + \phi) \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= \frac{U_0 m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi + \phi] + \\ &+ \frac{U_0 m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi - \phi]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

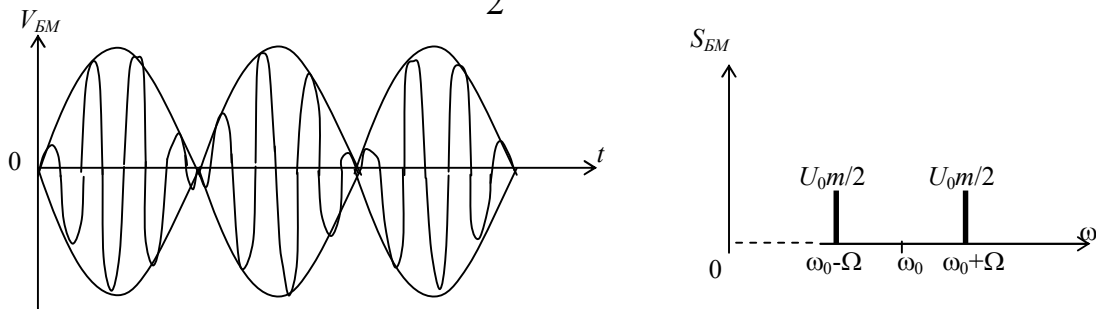


Рис. 4.5

Итак, здесь имеет место перемножение двух сигналов – модулирующего и несущего. Колебания вида (4.7) с физической точки зрения являются биениями двух гармонических сигналов с одинаковыми амплитудами  $U_0 m / 2$  и частотами, равными верхней боковой и нижней боковой.



Здесь при переходе огибающей биений через ноль, фаза высокочастотного заполнения меняется скачком на  $180^\circ$ , поскольку функция  $\cos(\Omega t + \phi)$  имеет разные знаки слева и справа от нуля. В результате на выходе добротного контура не будет сигнала на частоте резонанса  $\omega_0$ .

#### 4.1.2. Однополосная амплитудная модуляция (ОБП)

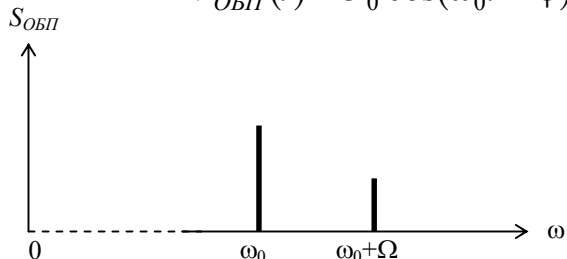
$$V_{\text{ОБП}}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{U_0 m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \phi + \phi]. \quad (4.8)$$


Рис. 4.6

Чтобы найти огибающую сигнала, проведя преобразование, имеем:

$$\begin{aligned} V_{\text{ОБП}}(t) &= U_0 \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{U_0 m}{2} \cos(\Omega t + \phi) \cos(\omega_0 t + \phi) - \\ &\quad - \frac{U_0 m}{2} \sin(\Omega t + \phi) \sin(\omega_0 t + \phi) = \\ &= U_0 \left[ 1 + \frac{m}{2} \cos(\Omega t + \phi) \right] \cos(\omega_0 t + \phi) - \frac{U_0 m}{2} \sin(\Omega t + \phi) \sin(\omega_0 t + \phi). \end{aligned} \quad (4.8')$$

В последнем выражении оба члена представляют собой произведение двух функций – медленной (частота  $\Omega$ ) и быстрой (частота  $\omega_0$ ). Напомним, что  $a \sin \omega t + b \cos \omega t = A \sin(\omega t + \theta)$ , где  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $\text{tg} \theta = \frac{b}{a}$ . Принимая во внимание, что “быстрые” сомножители в выражении (4.8') находятся между собой в квадратуре, вычисляем медленно изменяющуюся огибающую:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \sqrt{\left[ 1 + \frac{m}{2} \cos(\Omega t + \phi) \right]^2 + \frac{m^2}{4} \sin^2(\Omega t + \phi)} = \\ &= U_0 \sqrt{1 + m \cos(\Omega t + \phi) + \frac{m^2}{4}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

а в АМ колебании огибающая равна  $U_0 (1 + m \cos \Omega t)$ .

Спектр ОБП сигнала и огибающая приведены на рис. 4.7.

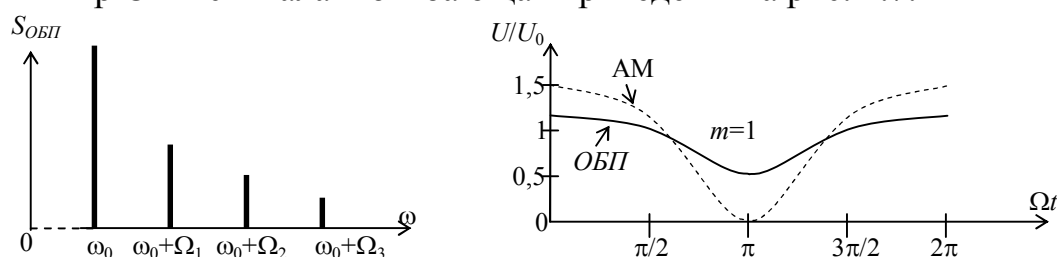


Рис. 4.7



Как видно из (4.9) и рис. 4.7, амплитудное детектирование ОБП сигнала сопровождается искажениями.

Основное достоинство такого сигнала – уменьшение в два раза занимаемой полосы частот.

## 4.2. Сигналы с угловой модуляцией

В несущем колебании  $V=U_0\cos(\omega t+\varphi)$  можно изменять не только амплитуду, а также либо частоту  $\omega$ , либо фазу  $\varphi$ , оставляя амплитуду постоянной.

Поскольку аргумент  $\psi=\omega t+\varphi$  является полной фазой и определяет текущее значение фазового угла, такие сигналы получили название сигналов с угловой модуляцией.

### 4.2.1. Фазовая модуляция (ФМ)

Если полная фаза процесса  $\Psi(t) = \omega_0 t + kX(t)$ ,

где  $X(t)$  – сообщение,  $k$  – коэффициент пропорциональности,  $\omega_0$  – значение частоты в отсутствии сообщения  $X(t)$ , то имеем сигнал с фазовой модуляцией

$$V_{\text{ФМ}}(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + kX(t)]. \quad (4.10')$$

Если сообщение  $X(t) = \text{const}$ , то ФМ-сигнал является простым высокочастотным сигналом.

Если  $X(t) = A \cos \Omega t$ , то с увеличением значений сообщения  $X(t)$  полная фаза  $\psi(t)$  растет во времени быстрее, чем по линейному закону. При уменьшении значений модулирующего сообщения происходит спад скорости роста  $\psi(t)$  во времени (см. рис. 4.8).

В моменты времени, когда сигнал  $X(t)$  достигает экстремальных значений, абсолютный угол между ФМ-сигналом и немодулированным гармоническим колебанием оказывается наибольшим.

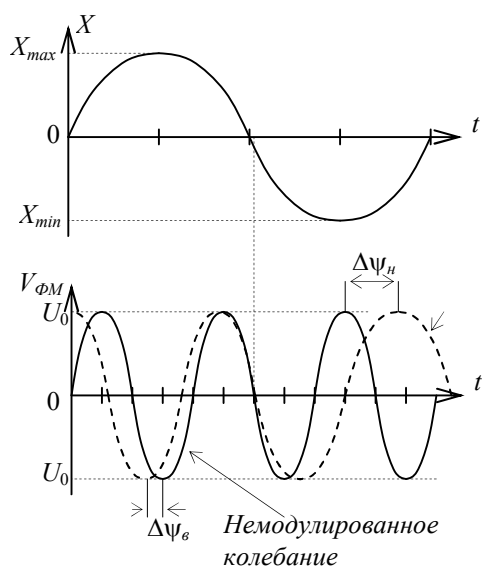


Рис. 4.8

Предельное значение этого фазового сдвига называют девиацией фазы  $\Delta\psi$ . В общем случае, когда сообщение  $X(t)$  изменяет знак, принято различать девиацию фазы вверх  $\Delta\psi_{\text{в}} = kX_{\text{max}}$  и девиацию фазы вниз  $\Delta\psi_{\text{н}} = kX_{\text{min}}$ .

### 4.2.2. Частотная модуляция (ЧМ)

Мгновенная частота  $\omega(t)$  сигнала с угловой модуляцией определяется как первая производная от полной фазы по времени, т.е. мгновенная частота – это скорость изменения полной фазы:



$$\omega(t) = \frac{d\psi}{dt} - \text{мгновенная частота.} \quad (4.11)$$

Откуда, полная фаза равна:

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \varphi_0, \quad (4.12)$$

где  $\varphi_0$  – начальная фаза в момент времени  $t=0$ .

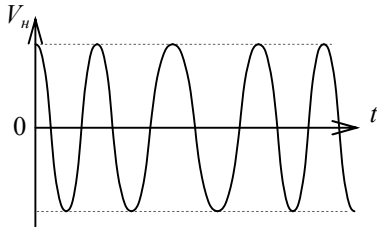
При ЧМ - сигнале между сообщением  $X(t)$  и мгновенной частотой  $\omega(t)$  будет связь вида

$$\omega(t) = \omega_0 + kX(t). \quad (4.13)$$

Поэтому из (4.12) и (4.13)

$$V_{\text{ЧМ}}(t) = U_0 \cos \psi(t) = U_0 \cos \left[ \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \varphi_0 \right],$$

$$V_{\text{ЧМ}}(t) = U_0 \cos \left[ \omega_0 t + k \int_0^t X(\tau) d\tau + \varphi_0 \right]. \quad (4.14)$$



В соответствии с (4.13) параметрами ЧМ - сигнала являются девиация частоты вверх  $\Delta\omega_g = kX_{\text{max}}$  и девиация частоты вниз  $\Delta\omega_n = kX_{\text{min}}$

Рис. 4.9

Если  $X(t)$  - достаточно гладкая функция, то внешне осциллограммы ФМ и ЧМ - сигналов не отличаются. Однако имеет место принципиальная разница: фазовый сдвиг между ФМ - сигналом и немодулированным пропорционален  $X(t)$ , для ЧМ этот сдвиг пропорционален интегралу от  $X(t)$  (сравните (4.10') и (4.14)). Т.е. ЧМ и ФМ-сигналы ведут себя по-разному при изменении частоты модуляции и амплитуды модулирующего колебания.

При ЧМ девиация частоты  $\Delta\omega \sim a$  (амплитуде НЧ - сигнала), в то же время девиация частоты  $\Delta\omega$  не зависит от частоты  $\Omega$  модулирующего сигнала.

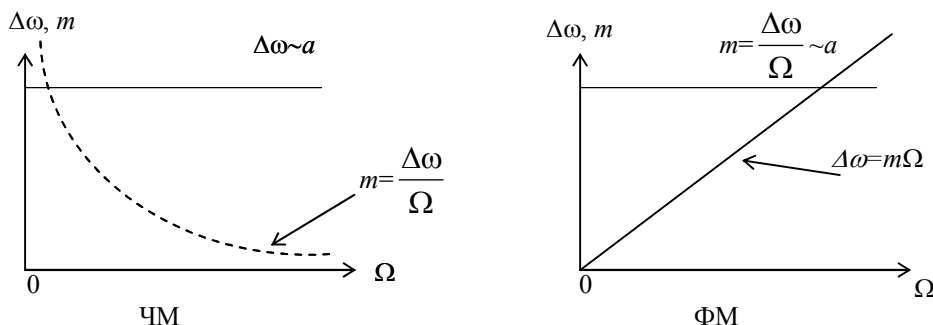


Рис. 4.10

При ФМ индекс модуляции  $m = \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sim a$  - амплитуде НЧ - сигнала независимо от частоты модуляции. Как следствие этого, девиация частоты при фазовой модуляции линейно увеличивается с ростом частоты модулирующего сигнала.



Таким образом, при гармоническом модулирующем сигнале различие между ЧМ и ФМ можно выявить, только изменяя частоту модуляции.

#### 4.2.3. Общие соображения о спектре сигналов с угловой модуляцией

Если колебание

$$V(t) = U_0 \cos[\omega t + \varphi(t)] \quad (4.15)$$

получено с помощью ФМ, то  $\varphi(t)$  и  $X(t)$  полностью совпадают по форме и отличаются лишь постоянными коэффициентами. При этом, очевидно, с точностью до постоянного коэффициента совпадают спектры функций  $\varphi(t)$  и  $X(t)$ .

При ЧМ функция  $\varphi(t)$  является интегралом от передаваемого сообщения  $X(t)$ . Т.к. интегрирование является линейным преобразованием, то при ЧМ спектр функции  $\varphi(t)$  состоит из тех же компонент, что и спектр сообщения  $X(t)$ , но с измененными амплитудами и фазами.

Отвлекаясь от способа осуществления угловой модуляции и считая заданным спектр функции  $\varphi(t)$ , находим спектр модулированного колебания  $V(t)$ . Для этого выражение (4.15) преобразуем к виду:

$$V(t) = U_0 \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - U_0 \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t = u_c(t) - u_s(t) \quad (4.16)$$

Из этого выражения следует, что модулированное по углу колебание можно рассматривать как сумму двух квадратурных колебаний: косинусного  $u_c$  и синусного  $u_s$ , каждое из которых модулировано только по амплитуде. Закон АМ для косинусного колебания определяется медленной функцией  $\cos \varphi(t)$ , для синусного — функцией  $\sin \varphi(t)$ . Но для определения спектра АМ колебания достаточно сдвинуть на частоту  $\omega_0$  спектр огибающей амплитуд. Следовательно, для нахождения спектра колебания  $u(t)$ , определяемого выражением (4.16), необходимо найти сначала спектры функций  $\cos \varphi(t)$  и  $\sin \varphi(t)$ , т.е. спектры огибающих квадратурных колебаний.

Из приведенных рассуждений следует, что при одном и том же передаваемом сообщении спектр колебания, модулированного по углу, значительно сложнее, чем спектр модулированного по амплитуде. Действительно, т.к.  $\cos \varphi(t)$  и  $\sin \varphi(t)$  являются нелинейными функциями своего аргумента  $\varphi(t)$ , то спектры этих колебаний могут существенно отличаться от спектра функции  $\varphi(t)$ . Это обстоятельство, а также наличие двух квадратурных слагаемых, показывает, что при угловой модуляции спектр модулированного колебания нельзя получить простым сдвигом спектра колебания на величину несущей частоты  $\omega_0$ , как это имеет место при АМ.

#### 4.2.4. Спектральное разложение ЧМ и ФМ сигналов при малых индексах модуляции

Задачу о представлении сигналов с угловой модуляцией посредством суммы гармонических колебаний несложно решить в том случае, когда  $m \ll 1$ . Для тонально-модулированного колебания  $V(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ , т.к.  $\varphi(t) = m \sin \Omega t$ , имеем  $V(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + m \sin \Omega t]$ .



Для этого преобразуем эту формулу следующим образом:

$$V(t) = U_0 \cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - U_0 \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t,$$

т.к.  $m \ll 1$ , то  $\cos(m \sin \Omega t) \approx 1$ ,  $\sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t$ .

Отсюда  $V(t) \approx U_0 \cos \omega_0 t - U_0 m \sin \Omega t \cdot \sin \omega_0 t$ , т.е.

$$V(t) \approx U_0 \cos \omega_0 t + \frac{mU_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{mU_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t \quad (4.17)$$

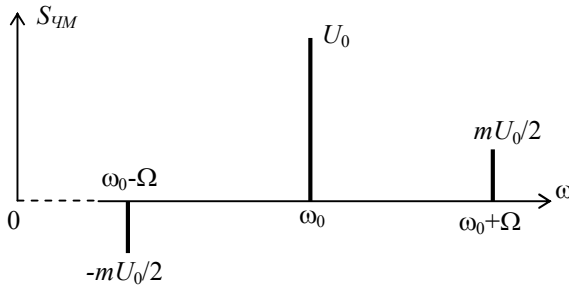


Рис. 4.11

При увеличении фазового отклонения, т.е. при возрастании  $m$ , уравнение (4.17) и спектр не дают правильного представления о действительной картине явлений при ЧМ и ФМ. Это объясняется тем, что с помощью колебаний несущей частоты и всего лишь одной пары боковых частот невозможно представить колебание, частота которого или фаза изменяется в широких пределах, а амплитуда остается строго постоянной. Для получения правильной картины необходимо учитывать боковые частоты высших порядков.

#### 4.2.5. Спектр сигнала с угловой модуляцией при произвольном значении индекса модуляции

Итак, при тональной угловой модуляции

$$U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t) = U_0 \operatorname{Re}(e^{j\omega_0 t} \cdot e^{jm \sin \Omega t}). \quad (4.18)$$

В теории бесселевых функций доказывается, что экспонента  $\exp\{+jm \sin Z\}$ , периодическая на отрезке  $-\pi \leq Z \leq \pi$  разлагается в периодический ряд Фурье

$$e^{jm \sin Z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{jkZ}, \quad (4.19)$$

где  $m$  – любое вещественное число,  $J_k(m)$  – функция Бесселя  $k$  – порядка от аргумента  $m$  (рис.4.12).

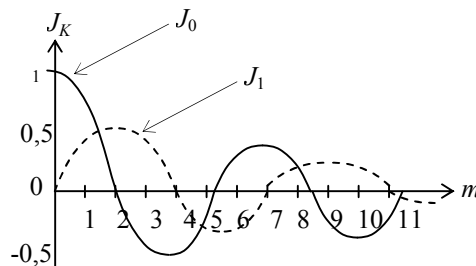


Рис. 4.12



Сравнивая (4.18) и (4.19) и подставляя  $Z=\Omega t$ , перепишем (4.18) так:

$$U(t) = U_0 \operatorname{Re} \left( e^{j\omega_0 t} e^{jm \sin \Omega t} \right) = U_0 \operatorname{Re} \left( e^{j\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{jk\Omega t} \right) \quad (4.20)$$

Отсюда получаем следующую модель ЧМ-ФМ - сигнала с любым значением индекса модуляции

$$U(t) = U_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \cos(\omega_0 + k\Omega)t$$

Напомним, что при  $m \ll 1$  ширина спектра ЧМ, как и у АМ, равна  $2\Omega$ . При значении  $m$  в пределах от 0,5 до 1 приобретает некоторое значение вторая пара боковых частот, ввиду чего ширина спектра приблизительно равна  $4\Omega$ . Далее при  $1 < m < 2$  приходится учитывать третью и четвертую пары боковых частот и т.д.

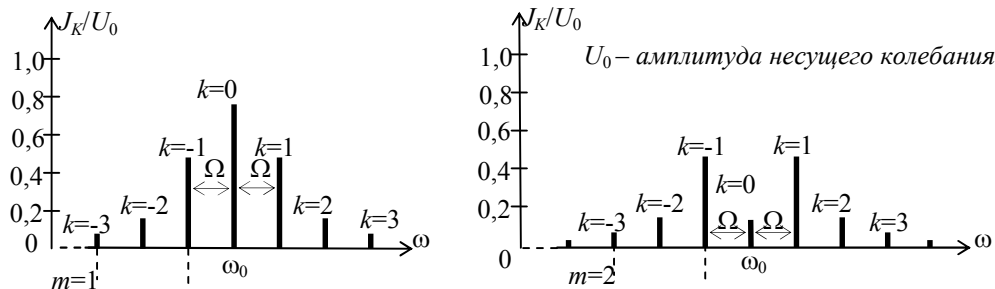


Рис. 4.13

Фазы колебаний на этих рисунках не учитываются, однако следует иметь в виду что, при нечетных  $k$  амплитуды нижних боковых следует брать со знаком минус. Дело в том, что в теории Бесселевых функций доказано, что функции с положительными и отрицательными индексами

$$J_{-k}(m) = (-1)^k J_k(m),$$

поэтому начальные фазы боковых колебаний с частотами  $\omega_0 + k\Omega$  и  $\omega_0 - k\Omega$  совпадают, если  $k$  – четное, и отличаются на  $180^\circ$ , если  $k$  – нечетное.

Чем больше индекс  $k$  функции Бесселя, тем протяженнее область аргументов, при которых эта функция мала. Важно отметить, что с ростом индекса модуляции  $m$  расширяется полоса частот, занимаемая сигналом. Обычно полагают, что допустимо пренебречь всеми спектральными составляющими с номером  $k > m+1$ . Отсюда следует оценка практической ширины спектра с угловой модуляцией  $\Pi_{np} = 2k\Omega$  или  $\Pi_{np} = 2(m+1)\Omega$ .

Как видно, реальные ЧМ и ФМ - сигналы характеризуются условием  $m \gg 1$ , итак,

$$\Pi_{np} \approx 2m\Omega = 2\Delta\omega. \quad (4.21)$$

Таким образом, сигнал с угловой модуляцией занимает полосу, приблизительно равную удвоенной девиации частоты.

Отметим, что для передачи АМ – сигнала требуется полоса в  $m$  раз меньшая. Большая полоса, занимаемая ЧМ и ФМ, обусловила их большую помехозащищенность, однако в целях радиосвязи их применение целесообразно в диапазоне УКВ (метровых и более коротких волн).



Вопрос: Возможно ли отсутствие в спектре ЧМ несущего колебания на частоте  $\omega_0$ ? Ответ: Да, т.к. при перераспределении мощность  $V_m$  по частотным составляющим в соответствии с  $J_n(m)$  может быть  $J_0(m)=0$ .

### 4.3. Дискретизация узкополосного сигнала (теорема Котельникова для узкополосного сигнала)

Пусть задан сигнал  $U(t) = V(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ , спектр которого заключен в узкой полосе частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  так, что модуль спектральной плотности равен  $|S_u(\omega)|$  (рис.4.14). Причем в пределах полосы  $\Delta\Omega$  спектр не обязательно симметричен относительно центральной частоты  $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ .

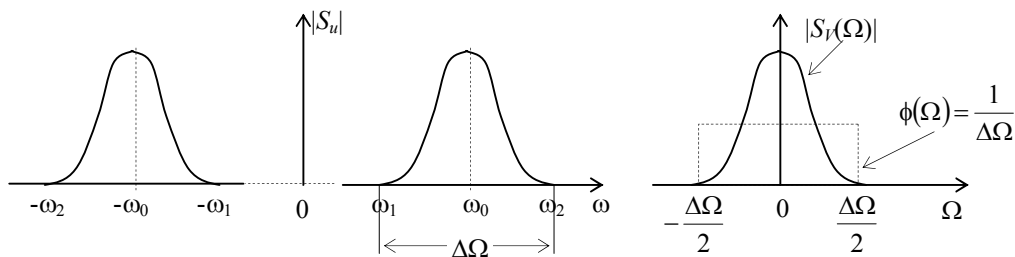


Рис. 4.14

Под узкополосностью сигнала понимается

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega_0} = \frac{\Delta F}{f_0} \ll 1,$$

где  $\Delta F = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} = F_2 - F_1$  - полоса частот модуляции.

Предполагается, что  $V(t)$  является простейшей огибающей. Если при дискретизации подобного сигнала исходить из теоремы Котельникова  $\Delta t \leq \frac{1}{2f_s} = \frac{1}{2f_2}$ , где  $f_s = f_2$  - наивысшая частота спектра, то это не целесообразно, т.к. информация о сигнале заложена не в частоту  $f_2$ , а в огибающую  $V(t)$ , или в фазу  $\varphi(t)$ , которые изменяются медленно с относительно низкими частотами модуляции.

Перейдем к комплексному сигналу

$$\dot{U}(t) = V(t)e^{j\varphi(t)} = V(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_0 t} = \dot{V}(t)e^{j\omega_0 t}. \quad (4.22)$$

Здесь комплексная огибающая  $\dot{V}(t) = V(t)e^{j\varphi(t)}$  представляет собой НЧ - функцию, спектр которой примыкает к нулевой частоте (рис.4.15). Разложим комплексную функцию  $\dot{V}(t) = V(t)e^{j\varphi(t)}$  по ортогональной системе

$$\dot{V}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n l_n(t), \quad (4.23)$$

Базисная функция системы:



$$l_n(t) = \frac{\sin \Omega_g(t - n\Delta t)}{\Omega_g(t - n\Delta t)}, \quad (4.24)$$

где  $\Delta t = \frac{1}{2F_g} = \frac{1}{\Delta F}$ ,  $\Omega_g = 2\pi F_g$ .

Отсюда выражение (4.22) имеет вид:

$$\dot{U}(t) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n l_n(t) \right] e^{j\omega_0 t}.$$

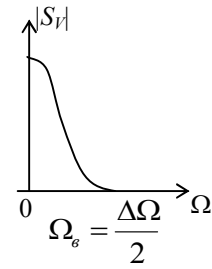


Рис. 4.15

Определим теперь исходные колебания  $U(t)$  как реальную часть комплексного сигнала

$$U(t) = \text{Re} \left\{ \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n l_n(t) \right] e^{j\omega_0 t} \right\}. \quad (4.25)$$

Как видим, задача дискретизации высокочастотного колебания свелась к задаче дискретизации комплексной огибающей  $\dot{V}(t)$ , т.е. необходимо исходить из наивысшей частоты в огибающей  $\Delta t = \frac{1}{\Delta F} = \frac{1}{2F_g}$ .

Используя (4.25) и (4.24), получаем по аналогии с рядом Котельникова для НЧ - сигнала:

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(n\Delta t) \cdot \frac{\sin \Omega_g(t - n\Delta t)}{\Omega_g(t - n\Delta t)} \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi(n\Delta t)]. \quad (4.26)$$

Итак, если модулирующая функция ограничена по спектру частотой  $F_g$ , то узкополосный сигнал можно дискретизировать во времени с интервалом  $\Delta t \leq \frac{1}{2F_g}$ .

При заданной длительности сигнала  $T_c$  число отсчетных точек  $n = \frac{T_c}{\Delta t} = T_c \Delta F$ , причем в каждой точке должны быть заданы в общем случае два параметра:  $V(n\Delta t)$  и  $\varphi(n\Delta t)$ .

Так как при амплитудной модуляции фаза высокочастотного заполнения постоянна, то АМ колебание определяется значениями своих амплитуд, взятыми через интервал  $\Delta t = \frac{1}{2F_g}$ , где  $F_g$  – верхняя частота в спектре модулирующей функции (т.е. в функции передаваемого сообщения).



## II. Основы теории радиотехнических цепей

### 5. Классификация и описание цепей

Схемы, применяемые для создания, преобразования, передачи и обработки сигналов, весьма разнообразны по принципам построения, методам их математического описания и внешним характеристикам.

Радиоэлектронное устройство независимо от своего назначения и уровня представляет собой совокупность физических объектов, между которыми существуют определенные взаимодействия. В структуре устройства можно выделить вход, на который подается исходный сигнал, и выход, откуда снимается преобразованный сигнал. Если интересуются лишь связью между сигналами и не описывают внутренние процессы, то говорят, что система представляет собой “черный ящик”.

Закон связи между сигналами  $\vec{U}_{ex}$  и  $\vec{U}_{вых}$  задают системным оператором  $T$ , т.е.

$$\begin{array}{c} \vec{U}_{ex} \\ \xrightarrow{D_{ex}} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline T \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \vec{U}_{вых} \\ \xrightarrow{D_{вых}} \end{array} \quad \vec{U}_{вых} = T\vec{U}_{ex}. \quad (5.1)$$

Чтобы полностью определить задачу следует указать область  $D_{ex}$  некоторого функционального пространства – область допустимых входных воздействий и  $D_{вых}$  – область допустимых выходных сигналов.

Математической моделью системы называют совокупности системного оператора  $T_u$ , а также двух областей допустимых сигналов  $D_{ex}$  и  $D_{вых}$ .

#### 5.1. Классификация цепей

1) По зависимости реакции от времени поступления сигнала.

Система стационарна, если ее выходная реакция не зависит от того, в какой момент времени поступает входной сигнал, т.е. из (5.1) следует:

$$\vec{U}_{вых}(t \pm t_0) = T\vec{U}_{ex}(t \pm t_0) \text{ при любом } t_0.$$

Стационарные системы называют также системами с постоянными во времени параметрами.

2) По выполнению принципа суперпозиции.

Если оператор системы такой, что справедливы равенства

$$\begin{cases} T(\vec{U}_{ex1} + \vec{U}_{ex2}) = T\vec{U}_{ex1} + T\vec{U}_{ex2} \\ T(\alpha\vec{U}_{ex}) = \alpha T(\vec{U}_{ex}) \end{cases}, \quad (5.2)$$

где  $\alpha$  - произвольное число, то система линейная.

3) По соотношению характерного размера  $\beta$  и длины волны  $\lambda$ .

Если  $\beta \ll \lambda$  - система сосредоточенная, если  $\beta \geq \lambda$  - система распределенная.



## 5.2. Методы математического описания линейных цепей

Линейная радиоэлектронная цепь представляет систему соединенных в разных конфигурациях линейных элементов ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ), для которых выполняется принцип суперпозиции.

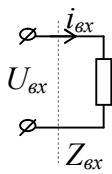
### 5.2.1. Элементы электрических цепей

#### а) Двухполюсники

Сложная цепь (или отдельный ее участок), имеющая два отдельных зажима (полюса), к которым может быть подключен источник питания или другие электрические цепи, называется двухполюсником.

Двухполюсник (или многополюсник) называется пассивным, если в нем нет источников энергии. Если же он содержит в себе источник энергии, его называют активным.

Входным импедансом пассивного двухполюсника называется сопротивление между его полюсами.



Проводимость

$$\dot{Z}_{ex} = \frac{\dot{U}_{ex}}{\dot{I}_{ex}}.$$

$$\dot{G}_{ex} = \frac{1}{\dot{Z}_{ex}} = \frac{\dot{I}_{ex}}{\dot{U}_{ex}}.$$

Вспомним из курса общей физики: ЭДС, индуцируемая на зажимах индуктивности:

$$\begin{aligned} U_L &= L \frac{di_L}{dt}, \\ i_L &= \frac{1}{L} \int U_L dt, \\ \dot{Z}_L &= j\omega L, \end{aligned} \quad (5.3)$$

т.е. индуктивность запасает энергию в магнитном поле.

Через емкость  $C$  проходит ток смещения:

$$\begin{aligned} i_C &= C \frac{dU_C}{dt}, \\ U_C &= \frac{1}{C} \int i_C dt, \\ \dot{Z}_C &= \frac{1}{j\omega C}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

т.е. емкость запасает энергию в электрическом поле.

Закон Ома для участка цепи с активным сопротивлением, рассеивающим энергию



$$i_R = \frac{U_R}{R}. \quad (5.5)$$

### б) Четырехполюсники

Четырехполюсником называется сложная цепь, имеющая четыре зажима, к которым могут подключаться источники питания или другие электрические цепи.



Рис. 5.1

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} - \text{комплексный коэффициент передачи напряжения};$$

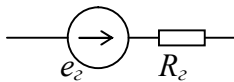
$$\dot{K}_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} - \text{комплексный коэффициент передачи тока};$$

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} - \text{входной импеданс};$$

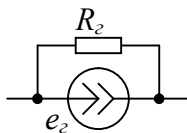
$$\dot{Z}_{\text{вых}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} - \text{выходной импеданс}.$$

### в) Источники энергии

Источник напряжения - такой источник, у которого напряжение на выходных зажимах не зависит от свойства цепи, являющейся внешней по отношению к источнику ( $R_{\text{вн}}=0$ ). Реальный источник напряжения имеет какое-то сопротивление, поэтому реальные источники напряжения изображаются в виде последовательной схемы.



Источник тока - источник, у которого сила тока, проходящего через его внешние зажимы, не зависит от свойства цепи, внешней по отношению к источнику ( $R_{\text{вн}}=\infty$ ). Реальные источники тока изображаются в виде параллельной схемы.



### 5.2.2. Метод контурных токов

Сложная электрическая цепь состоит из узлов и ветвей. Рассмотрим для примера следующую схему:



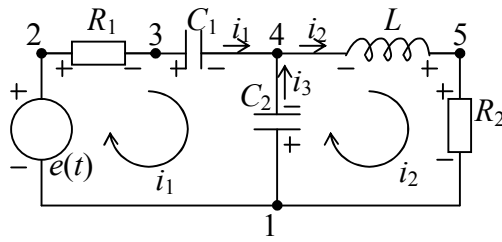


Рис. 5.2

Узлы – это такие точки схемы, в которых соединяются не менее трех двухполюсников, содержащих только последовательно соединенные элементы.

Ветвями называются пассивные или активные двухполюсники, включенные между двумя узлами и составленные из последовательно соединенных пассивных элементов и (если они есть) из источников энергии.

Используя I и II законы Кирхгофа, можно составить дифференциальные уравнения, полностью описывающие эту цепь.

По I закону Кирхгофа – алгебраическая сумма  $n$  токов, сходящихся в узле,

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0. \quad (5.6)$$

Первоначально направление токов можно принять произвольно. Так, можно считать, что токи, направленные к узлам, – положительные, токи, вытекающие из узлов, – отрицательные.

Если в результате расчета для каких-либо токов получатся отрицательные значения, это будет означать, что их действительное направление противоположно заданному.

При составлении системы уравнений надо помнить, что для того, чтобы уравнения были линейно независимыми, достаточно, чтобы каждое последующее уравнение содержало, по крайней мере, на одно неизвестное больше, чем предшествующее.

Второй закон Кирхгофа относится к замкнутым контурам. Согласно этому закону,

$$\sum_{k=1}^M \dot{I}_k Z_k = \sum_{n=1}^N e_n, \quad (5.7)$$

где  $M$  – число импедансов, входящих в контур;  $N$  – число ЭДС, действующих в контуре.

Направление обхода контура можно выбрать произвольно. В тех случаях, когда направление тока (падение напряжения) или ЭДС совпадают с направлением обхода, соответствующее слагаемое берется с одним (например, положительным знаком); если не совпадает – с обратным знаком.

Надо иметь в виду: падение напряжения направлено так же, как и ток: от более высокого потенциала (плюса) к более низкому (минусу).

Что касается ЭДС, то ее, наоборот, надо считать направленной от минуса к плюсу. В том случае, когда направление ЭДС и тока через генератор совпадают, последний отдает энергию; если же они противоположны, то данный генератор потребляет энергию (т.е. работает в “двигательном режиме”).



При выборе замкнутого контура следует руководствоваться тем, чтобы каждый последующий контур отличался от предыдущих хотя бы одной ветвью. Тогда будет соблюдено правило о независимости уравнений, составляющих систему.

Пример: Составим систему уравнений для нашей цепи (рис. 5.2)

Введем следующее понятие:

Контурные токи, это те токи, которые проходили бы в каждом из контуров, если бы эти контуры не имели общих ветвей, т.е. были бы изолированы друг от друга.

В соответствии с этим контурный ток  $i_1$  обтекает цепь  $e, R_1, C_1, C_2$ , контурный ток  $i_2 - C_2, L, R_2$ . Примем одинаковое направление контурных токов (например, по часовой стрелке).

При обходе всех контуров в одном направлении, совпадающем с выбранным положительным направлением контурного тока, в левой части уравнения для данного контура суммируются с положительным знаком. В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма действующих в контуре ЭДС, причем ЭДС, направление которых совпадает с направлением обхода, считается положительным направлением. Число необходимых для решения задачи уравнений в данном методе равно числу независимых контуров

$$n = N_1 - (N_2 - 1), \quad (5.8)$$

где  $N_1$  – число ветвей,  $N_2$  – количество узлов.

В нашем примере  $N_2=2$ ,  $N_1=3$ , следовательно, число независимых контуров  $n=3-(2-1)=2$ . Это же число можно определить по числу разрывов, которые можно провести в цепи, чтобы в ней не осталось замкнутых контуров.

Проверка: Порядок дифференциального уравнения определяется числом независимых элементов, запасующих энергию. Причем, емкости, включенные параллельно, считаются за один накопитель, индуктивности, через которые течет один и тот же ток - один накопитель.

По I закону Кирхгофа,  $i_3+i_1=i_2$ ,  $i_3=i_2-i_1$ .

По II закону Кирхгофа,

$$\begin{cases} \text{I контур} & \left\{ \begin{array}{l} U_{R_1} + U_{C_1} - U_{C_2} = e, \\ \text{II контур} & \left\{ \begin{array}{l} -U_L + U_{R_2} + U_{C_2} = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} i_1 R_1 + \frac{1}{C} \int i_1 dt - \frac{1}{C_2} \int (i_2 - i_1) dt = e, \\ -L \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int (i_2 - i_1) dt = 0, \end{cases}$$

или



$$\begin{cases} R_1 \frac{di_1}{dt} + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i_1 - \frac{1}{C_2} i_2 = \frac{de}{dt}, \\ -L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} i_2 - \frac{1}{C_2} i_1 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем

$$i_1 = -LC_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 C_2 \frac{di_2}{dt} + i_2, \text{ подставив } i_1 \text{ в первое уравнение системы}$$

получили относительно  $i_2$  уравнение третьего порядка (т.е. имеем три элемента, накапливающих энергию).

### 5.2.3. Временной метод анализа линейных стационарных цепей

Для исследования прохождения сигналов через электрические цепи целесообразно воспользоваться замечательным свойством линейных цепей – принципом суперпозиции.

#### а) Импульсная характеристика цепи

Пусть некоторая стационарная система описывается оператором  $T$ . Импульсной характеристикой  $g(t)$ , которая используется для описания цепи во временной области, называется функция, являющаяся откликом на  $\delta$  импульс -  $g(t) = T\delta(t)$ . Т.к. система стационарна, то аналогично  $g(t-t_0) = T\delta(t-t_0)$ .

Зная импульсную характеристику линейной стационарной системы, можно, в принципе, решить любую задачу о прохождении детерминированного сигнала через такую систему.

Известно, что сигнал можно представить в виде

$$U_{ex}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{ex}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau, \text{ т.е. заданное колебание можно рассматривать как}$$

бесконечную последовательность смещенных  $\delta$  импульсов, умноженных на значение заданного сигнала в моменты, соответствующие смещениям.

Тогда, отвечающая сигналу  $U_{ex}(t)$  выходная реакция

$$U_{вых}(t) = TU_{ex}(t) = T \int_{-\infty}^{\infty} U_{ex}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \text{ Учитывая, что интеграл есть предельное}$$

значение суммы и, используя принцип суперпозиции, можно внести знак оператора  $T$  под знак интеграла.

$$U_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{ex}(\tau) T\delta(t - \tau) d\tau, \text{ но } T\delta(t - \tau) = g(t - \tau).$$

Т.е., так как в линейной системе работает принцип суперпозиции, то, определив реакцию на один  $\delta$  импульс, можно установить реакцию и на воздействие  $U_{ex}(t)$  как сумму реакций от каждого входного воздействия в отдельности. Следовательно,



$$U_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (5.9)$$

Подстановкой  $t - \tau = \tau'$  можно получить после изменения порядка интегрирования другую форму:

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t-\tau)g(\tau)d\tau. \quad (5.9')$$

Итак, чтобы получить сигнал на выходе, нам надо провести свертку функций  $U_{\text{вх}}(t)$  и  $g(t)$ .

На основании соотношения (5.9) импульсной характеристике  $g(t)$  можно придать другой смысл:  $g(\tau)$  есть «весовая функция» т.е. сигнал на выходе цепи  $U_{\text{вых}}(t)$  в момент  $t$  получается суммированием мгновенных значений входного сигнала  $U_{\text{вх}}(t)$ , взятых с весом  $g(t-\tau)$  за все предыдущее время.

Интеграл Дюамеля носит нелокальный характер, т.е. для получения значения  $U_{\text{вых}}$  в одной точке  $t$  необходимо изучить сигнал на всем времени существования  $\tau \in -\infty, +\infty$ .

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

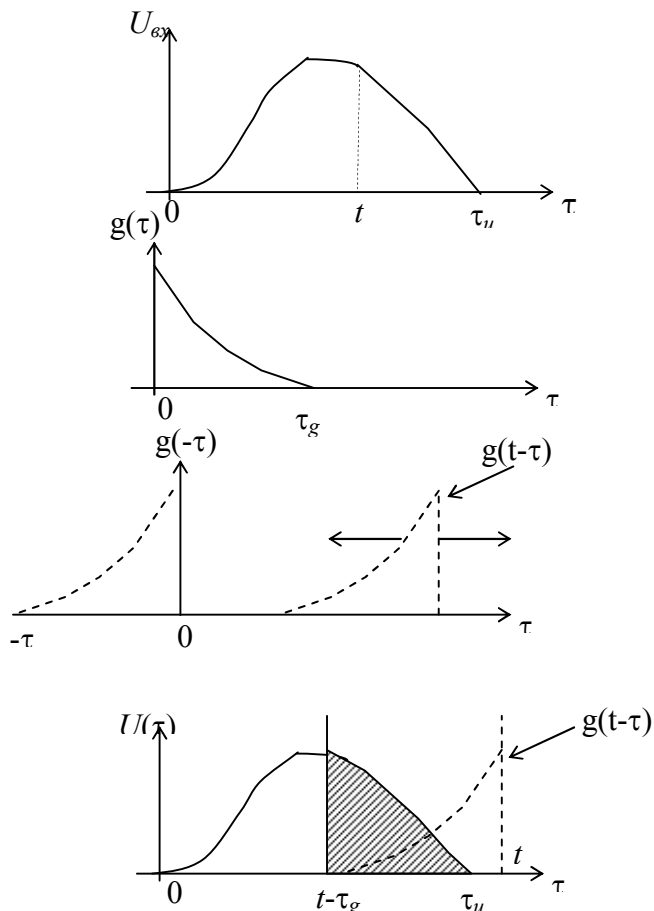


Рис. 5.3

На этом рисунке проиллюстрирован временной подход при анализе отклика системы. Видно, что отклик цепи на воздействие  $U_{\text{вх}}(\tau)$  не может закончиться



раньше, чем функция  $g(t-\tau)$  сместится вправо от окончания  $U_{ex}(\tau)$  на время, равное длительности импульсной характеристики  $\tau_g$ . Иными словами,

1. Сигнал на выходе цепи не может быть короче  $\tau_u + \tau_g$ .  $\tau_{вых} \geq \tau_u + \tau_g$
2. Сигнал на выходе не может появиться до момента его появления на входе.

Для того чтобы при прохождении через цепь сигнал не удлинялся, требуется выполнить условие  $\tau_g \rightarrow 0$ , т.е.  $g(\tau)$  должно приближаться к  $\delta$ -функции, а это равносильно требованию равномерности передаточной функции  $|K(j\omega)|$  при  $0 < |\omega| < \infty$ , что физически не реализуемо.

### б) Переходная характеристика цепи

Отклик цепи с оператором  $T$  на воздействие, имеющее вид «единичного скачка»  $\sigma(t)$ , называется переходной функцией  $h(t)$

$$h(t) = T\sigma(t).$$

Т.к. такое воздействие является интегралом от  $\delta$ -функции  $\delta(t) = d\sigma/dt$ , то между  $h(t)$  и  $g(t)$  существует интегральное соотношение

$$g(t) = T\delta(t) = T \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dT\sigma}{dt} = \frac{dh}{dt}, \quad (5.10)$$

т.е.

$$h(t) = \int_0^t g(x) dx, \quad g(t) = \frac{dh}{dt}. \quad (5.11)$$

Без вывода покажем формулу интеграла Дюамеля, выраженную через переходную характеристику:

$$\dot{U}_{вых}(t) = \dot{U}_{ex}(0)h(t) + \int_0^t \frac{d\dot{U}_{ex}}{d\tau} h(t-\tau) d\tau. \quad (5.12)$$

### в) Частотный коэффициент передачи цепи

Покажем, что комплексный сигнал  $\dot{U}_{ex}(t) = e^{j\omega t}$  при любом значении частоты  $\omega$  есть собственная функция линейного стационарного оператора  $T$ . Для этого воспользуемся интегралом Дюамеля вида (5.9').

$$\dot{U}_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} g(\tau) d\tau = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t}.$$

Для системного оператора  $T$

$$\dot{U}_{вых} = T\dot{U}_{ex} = Te^{j\omega t}. \text{ Отсюда имеем}$$

$$T = \dot{K}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{— частотный коэффициент передачи системы} \quad (5.13).$$

Иначе говоря, если на входе четырехполюсника действует  $\delta$  импульс ЭДС, (спектральная плотность его равна единице для всех частот), то спектральная



плотность выходного напряжения равна просто  $\dot{K}(j\omega)$ . Отсюда отклик на единичный импульс ( $\delta$  импульс), т.е. импульсную характеристику цепи получаем с помощью обратного преобразования Фурье

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.14)$$

Т.е. частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика линейной стационарной системы связаны между собой преобразованием Фурье.

Обозначим  $|\dot{K}(j\omega)|$  — АЧХ,  $\varphi(\omega)$  — ФЧХ этой системы.

$$\dot{K}(j\omega) = |\dot{K}(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}. \quad (5.13')$$

Приведем без вывода связь переходной характеристики с частотой:

$$h(t) = \frac{K(0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{K}(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{K(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\dot{K}(j\omega)|}{\omega} \cos\left[\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi(\omega)\right] d\omega \quad (5.15)$$

Из этих выражений видно, что всякое изменение частотных характеристик четырехполюсника  $|\dot{K}(j\omega)|$ ,  $\varphi(\omega)$  влечет за собой изменение временных характеристик четырехполюсника ( $g(t)$  и  $h(t)$ ).

Изменение полосы пропускания связано с изменением масштаба частот, т.е. при сжатии замена переменной  $\omega$  на  $n\omega$ . При этом функция  $\dot{K}_1(j\omega)$  переходит в функцию  $\dot{K}_2(j\omega) = \dot{K}_1(jn\omega)$  – сжатие сигнала по спектру в  $n$  раз.

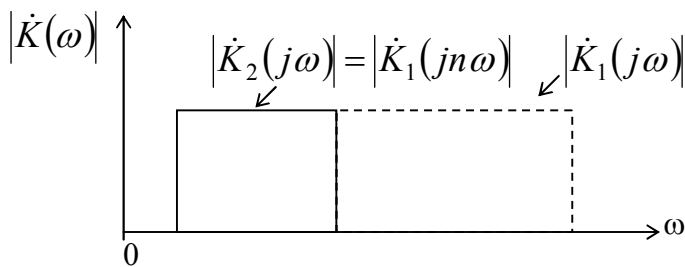


Рис. 5.4

Пусть четырехполюсникам соответствуют импульсные характеристики

$$g_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$g_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}_1(jn\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

введя  $x = n\omega$ , имеем:

$$g_2(t) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}_1(jx) e^{jx \frac{t}{n}} dx = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}_1(j\omega) e^{j\omega \frac{t}{n}} d\omega.$$

Из сравнения  $g_1$  и  $g_2$  видно, что если  $\dot{K}_2(j\omega) = \dot{K}_1(jn\omega)$ , то

$$g_2(t) = \frac{1}{n} g_1\left(\frac{t}{n}\right) \quad (5.16)$$

Аналогичная зависимость существует и между переходными характеристиками. Действительно проинтегрируем (5.16) от 0 до  $t$ :



$$h_2(t) = \int_0^t g_2(t) dt = \frac{1}{n} \int_0^t g_1\left(\frac{t}{n}\right) dt = \int_0^t g_1\left(\frac{t}{n}\right) d\frac{t}{n} = \int_0^{\frac{t}{n}} g_1(\tau) d\tau = h_1\left(\frac{t}{n}\right).$$

Следовательно, сжатие частотной характеристики в  $\alpha$  раз приведет к растяжению импульсной и переходной характеристик в то же число раз. Иначе говоря, чем уже (шире) полоса частот, пропускаемых каскадом, тем медленнее (быстрее) при прочих равных условиях, протекают в ней переходные процессы.

#### 5.2.4. Спектральный метод анализа стационарных цепей

В основе этого метода лежит использование частотной передаточной функции цепи  $\dot{K}(j\omega)$ .

Если на входе линейного четырехполюсника действует сигнал произвольной формы  $\dot{U}_{\text{ex}}(t)$ , то в соответствии с прямым преобразованием Фурье его спектральная плотность

$$\dot{S}_{\text{ex}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{\text{ex}}(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.17)$$

Умножая  $\dot{S}_{\text{ex}}(\omega)$  на  $\dot{K}(j\omega)$ , определяется спектральная плотность сигнала на выходе четырехполюсника, т.е.

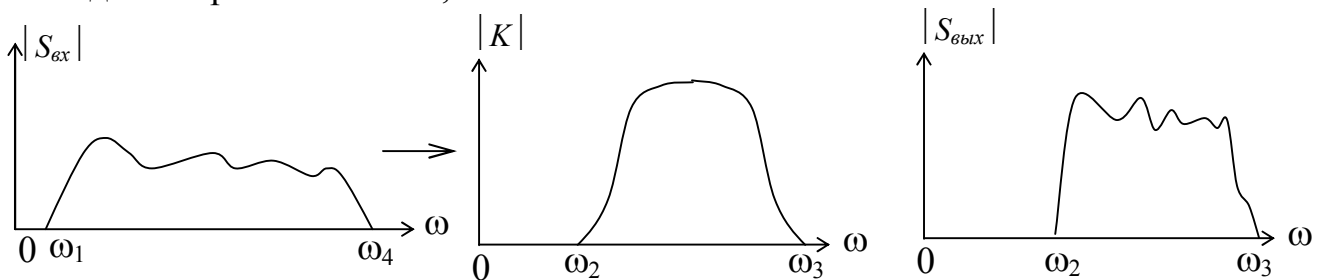


Рис. 5.5

$$\dot{S}_{\text{вых}}(\omega) = \dot{S}_{\text{ex}}(\omega) \cdot \dot{K}(j\omega).$$

Применяя обратное преобразование Фурье, имеем

$$\dot{U}_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{ex}}(\omega) \dot{K}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.18)$$

Сравнение (5.17) и (5.18) показывает, что сигнал на выходе линейной цепи можно получить суммированием составляющих спектра  $\dot{S}_{\text{ex}}(\omega)$ , взятых с весом  $\dot{K}(j\omega)$ .

#### 5.2.5. Понятие комплексной частоты

Спектральные методы основаны на том, что исследуемый сигнал представляется в виде суммы неограниченно большого числа элементарных слагаемых, каждое из которых периодически изменяется во времени по закону  $e^{j\omega t}$ .



Обобщение этого принципа заключено в том, что вместо комплексных экспоненциальных сигналов с чисто мнимыми показателями вводят в рассмотрение экспоненциальные сигналы вида  $e^{\rho t}$ , где  $\rho = \sigma + j\omega$  - комплексная частота, и  $e^{\rho^* t}$ , где  $\rho^* = \sigma - j\omega$ .

Из двух таких комплексных сигналов можно составить вещественный сигнал

$$U(t) = \frac{e^{\rho t} + e^{\rho^* t}}{2}$$

Действительно, при этом  $U(t) = e^{\sigma t} \frac{(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})}{2} = e^{\sigma t} \cos \omega t$ .

В зависимости от выбора вещественной и мнимой частей комплексной частоты  $\rho$  можно получить разнообразные вещественные сигналы (рис. 5.6). Так, при  $\sigma=0$ , но  $\omega \neq 0$  получаем обычное гармоническое колебание вида  $\cos \omega t$ .

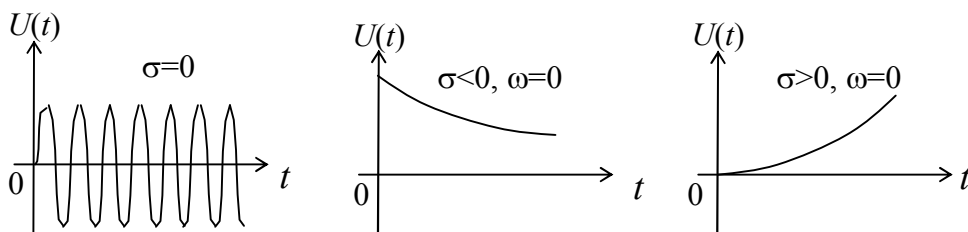


Рис. 5.6

Если же  $\omega=0$ , то в зависимости от знака  $\sigma$  получаем либо нарастающую ( $\sigma>0$ ), либо спадающую экспоненту ( $\sigma<0$ ).

Более сложную форму такие сигналы приобретают, когда  $\omega \neq 0$ . Здесь множитель  $e^{\sigma t}$  описывает огибающую которая экспоненциально меняется во времени (рис. 5.7).

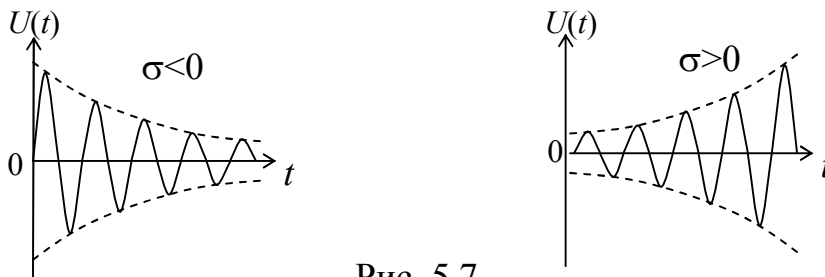


Рис. 5.7

Понятие комплексной частоты оказывается весьма полезным прежде всего потому, что дает возможность, не прибегая к обобщенным функциям, получать спектральные представления сигналов, математические модели которых не интегрируемы.

### 5.2.6. Представление сигналов на плоскости комплексной частоты

Анализ прохождения сигналов через линейные цепи, описываемые комплексной передаточной функцией, значительно облегчается при использовании методов контурного интегрирования на плоскости комплексной частоты  $\rho = \sigma + j\omega$ .



Переход от действительной переменной  $\omega$  к  $\rho = \sigma + j\omega$  позволяет также полностью устранить ограничения, вытекающие из требования абсолютной интегрируемости функции  $U(t)$ .

Представим функцию  $U(t)$ , в общем случае существующую при  $-\infty < t < \infty$ , в виде суммы двух функций

$$\dot{U}(t) = \dot{U}_+(t) + \dot{U}_-(t), \quad (5.19)$$

из которых

$\dot{U}_-(t)$  задан при  $-\infty < t < 0$ ,

$\dot{U}_+(t)$  задан при  $0 < t < \infty$ .

Вспомним преобразование Фурье (2.23) и (2.24)

$$\begin{cases} S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt \\ \dot{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{cases} \quad (5.20)$$

Совершим здесь переход от  $\omega$  к  $\rho$  для функции  $\dot{U}_+(t)$ . Для этого домножим  $\dot{U}_+(t)$  на  $e^{-\sigma_1 t}$ , где  $\sigma_1 > 0$ , тогда второе уравнение системы (5.20) будет следующим:

$$\dot{U}_+(t) \cdot e^{-\sigma_1 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_+(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (5.21)$$

здесь  $S_+(\omega)$  – спектральная плотность функции  $e^{-\sigma_1 t} \dot{U}_+(t)$ , т.е.  $S_+(\omega) \leftrightarrow e^{-\sigma_1 t} \dot{U}_+(t)$  есть пара преобразований Фурье.

Подставляем в (5.21)  $j\omega = \rho - \sigma_1$ ,  $\omega = \frac{\rho - \sigma_1}{j}$ , тогда  $d\omega = \frac{d\rho}{j}$ ,

$$e^{-\sigma_1 t} \dot{U}_+(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} S_+\left(\frac{\rho - \sigma_1}{j}\right) e^{(\rho - \sigma_1)t} d\rho. \quad \text{Отсюда, умножив обе части}$$

равенства на  $e^{\sigma_1 t}$ , имеем  $\dot{U}_+(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} S_+\left(\frac{\rho - \sigma_1}{j}\right) e^{\rho t} d\rho,$

$$\boxed{\dot{U}_+(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} L_+(\rho) e^{\rho t} d\rho} \quad (5.22)$$

Здесь  $L_+(\rho)$  – спектральная плотность сигнала  $e^{-\sigma_1 t} \dot{U}_+(t)$ , т.е.

$$L_+(\rho) = S_+\left(\frac{\rho - \sigma_1}{j}\right) = S_+(\omega) \stackrel{\text{из (5.21)}}{=} \int_0^{\infty} e^{-\sigma_1 t} \dot{U}_+(t) e^{-j\omega t} dt.$$

$$\text{Откуда } \boxed{L_+(\rho) = \int_0^{\infty} \dot{U}_+(t) e^{-\rho t} dt.} \quad (5.23)$$

Это односторонние преобразования Лапласа для сигналов с положительным временем  $0 < t < \infty$ .



Сравнение выражений (5.20) и (5.22), (5.23) показывает, что переход от  $\omega$  к  $\rho$  означает изменение пути интегрирования. В преобразовании Фурье (5.20) интегрирование ведется по действительной оси  $\omega$ . А в преобразовании Лапласа (5.22) по прямой, проходящей параллельно мнимой оси  $j\omega$  на расстоянии  $\sigma_1$  вправо от этой оси. Значение  $\sigma_1$  определяется характером подынтегральной функции в (5.22). Путь интегрирования должен проходить правее полюсов этой функции (рис. 5.8).

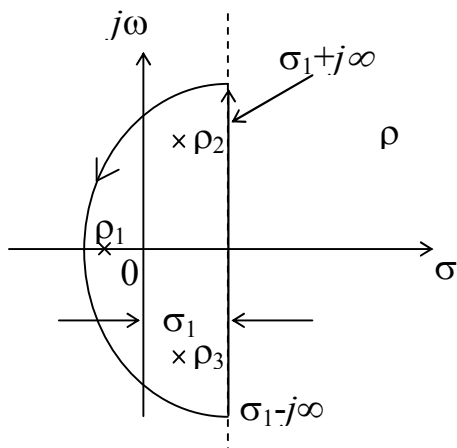


Рис. 5.8

Добавлением к прямой  $\sigma_1 - j\infty, \sigma_1 + j\infty$  дуги бесконечно большого радиуса можно образовать замкнутый контур. Для того чтобы добавление этой дуги не привело к изменению значения интеграла, нужно соблюдать следующее: при положительных  $t$  контур должен быть в левой полуплоскости  $\rho$ , при отрицательных  $t$  — в правой полуплоскости (рис. 5.9). Тогда, в соответствии с теоремой вычетов

$$\dot{U}_+(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} L_+(\rho) e^{\rho t} d\rho = \frac{1}{2\pi j} \oint L_+(\rho) e^{\rho t} d\rho = \sum_{i=1}^n \text{res}_i. \quad (5.24)$$

Аналогичные рассуждения можно провести для функции  $U_-(t)$

$$\begin{aligned} \dot{U}_-(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_2 - j\infty}^{\sigma_2 + j\infty} L_-(\rho) e^{\rho t} d\rho, \\ L_-(\rho) &= \int_{-\infty}^0 U_-(t) e^{-\rho t} dt. \end{aligned} \quad (5.25)$$

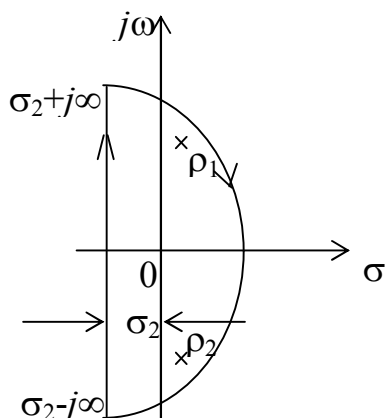


Рис.5.9

Выражения (5.22), (5.23) и (5.25) можно объединить:

$$\begin{cases} L_U(\rho) = L_+(\rho) + L_-(\rho) \\ \dot{U}(t) = \dot{U}_+(t) + \dot{U}_-(t) \end{cases} \quad - \quad \text{двустороннее преобразование Лапласа.}$$



Учитывая соответствие преобразований Фурье и Лапласа, можно по аналогии получить выражение для отклика сигнала на выходе линейного четырехполюсника.

$$\dot{U}_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} L(\rho)K(\rho)e^{\rho t} d\rho,$$

где  $L(\rho)$  преобразование Лапласа от входного сигнала  $\dot{U}(t)$ ,  $K(\rho)$  – передаточная функция в виде преобразования Лапласа,  $\rho = \sigma + j\omega$ . В соответствии с ранее изложенным, при  $t > 0$  замыкаем контур в левой полуплоскости  $\rho$ , так, чтобы полюсы оказались внутри контура. Следовательно,

$$\dot{U}_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint L(\rho)K(\rho)e^{\rho t} d\rho = \sum_{i=1}^n \text{res}_i, \quad t > 0, \quad (5.26)$$

Представим подынтегральную функцию в виде  $L(\rho)K(\rho)e^{\rho t} = \frac{C(\rho)}{D(\rho)}$ . В данном случае знаменатель  $D(\rho)$  образуется произведением множителей вида  $(\rho - \rho_i)$ , где  $\rho_i$  – полюсы подынтегральной функции. Тогда вычет  $\frac{C(\rho)}{D(\rho)}$ , имеющий в точке  $\rho_i$  простой полюс, определяется функцией

$$\text{res}_i = \frac{C(\rho_i)}{\left[ \frac{dD(\rho)}{d\rho} \right]_{\rho=\rho_i}}. \quad (5.27)$$

Если функция  $\frac{C(\rho)}{D(\rho)}$  имеет в точке  $\rho_i$  полюс кратности  $k$  ( $k$  – целое положительное число), то

$$\text{res}_i = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\rho^{k-1}} \left[ \frac{C(\rho)}{D(\rho)} (\rho - \rho_i)^k \right]_{\rho=\rho_i}. \quad (5.28)$$

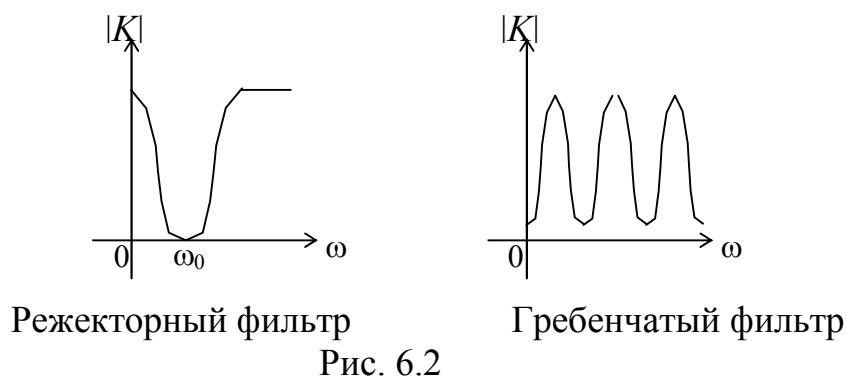
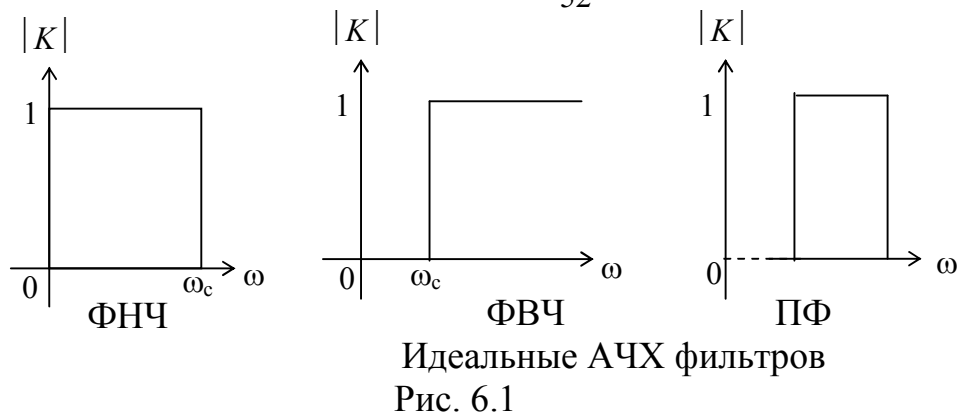
## 6. Линейная фильтрация

Проблема приема сигналов и их обработки (особенно в условиях воздействия помех) зачастую решается достаточно эффективно методами частотной селекции (связь, радиолокация), методами накопления полезного сигнала (радиометрия), методами согласованной фильтрации и т.д.

Назначение линейного фильтра – выделение из состава сложного электромагнитного колебания, подведенного ко входу фильтра, частотных составляющих, расположенных в заданной полосе частот, и подавления тех частотных составляющих, которые расположены в других полосах частот.

По взаимному расположению полос пропускания и задерживания различают фильтр нижних частот (ФНЧ), фильтр верхних частот (ФВЧ) и полосовой фильтр (ПФ).





Синтез фильтров базируется на теории четырехполюсников и требует выполнения условий их физической реализуемости.

### 6.1. Условия физической реализуемости линейных четырехполюсников

При теоретическом определении импульсной характеристики  $g(t)$  или частотного коэффициента передачи  $\dot{K}(j\omega)$  часто возникает вопрос о возможности практического осуществления устройств с найденными характеристиками (о возможности их физической реализации).

Требование физической реализации накладывает на  $g(t)$  и  $\dot{K}(j\omega)$  определенные ограничения:

- Для  $g(t)$ :
  - а)  $g(t)=0$  при  $t<0$ , потому что четырехполюсник не может реагировать на  $\delta$  импульс до его подачи.
  - б)  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ , т.к. в любой реальной линейной системе колебания не могут передаваться бесконечно долго.

Время, при котором  $g(t) \neq 0$ , называется памятью четырехполюсника -  $\tau_g$

$$\tau_{\text{вых}} \geq \tau_{\text{вх}} + \tau_g$$

- Для  $\dot{K}(j\omega)$ :
 

Пользуясь связью  $\dot{K}(j\omega)$  и  $g(t)$ , можно сформулировать требования физической реализуемости для  $\dot{K}(j\omega)$ .

  - в) Согласно теории интегрирования, в комплексной области для физически реализуемого четырехполюсника функция  $\dot{K}(\rho)$  не должна иметь полюсов в



правой полуплоскости комплексного переменного  $\rho$  и на мнимой оси  $j\omega$ . Иными словами, требуется, чтобы  $\dot{K}(\rho)$  была аналитической функцией комплексного переменного  $\rho$  в области  $\text{Re } \rho > 0$  и на мнимой оси.

г) Простейшее ограничение связано с тем, что импульсная характеристика  $g(t)$  такой системы должна быть вещественна в силу свойств преобразования Фурье. Это означает, что должно быть

$$\dot{K}(j\omega) = \dot{K}^*(j\omega). \quad (6.1)$$

д) Критерии Пэли-Винера

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln \dot{K}(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty. \quad (6.2)$$

По существу, это требование ограниченности сигнала  $U(t)$  по времени.

Примеры:

1) Идеальный ФНЧ не реализуем, т.к. обращение в 0  $\dot{K}(\omega)$ , а значит и  $\dot{K}(\rho)$ , противоречит условию Пэли-Винера (6.2) ( $\ln 0 \rightarrow -\infty$ ).

$$|\dot{K}(\omega)| = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_c, \\ 0, & \omega > \omega_c. \end{cases}$$

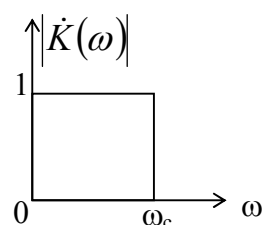


Рис. 6.3

2) Определить, реализуем ли четырехполюсник с коэффициентом передачи

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{j\omega B}{1 + j\omega B}.$$

Операторный коэффициент передачи:

$$K(\rho) = \frac{\rho B}{1 + \rho B}.$$

Здесь одна особая точка  $\rho = -1/B$ , которая при  $B > 0$  лежит в левой полуплоскости. Следовательно, такой четырехполюсник реализуем.

Не ставя перед собой задачи синтеза фильтрующих цепей, рассмотрим некоторые реализации линейных фильтров в виде последовательности пассивных элементов.

## 6.2. Фильтры нижних и верхних частот

### 6.2.1. ФНЧ (фильтр нижних частот)

Для создания ФНЧ требуются звенья двух видов: 1-го порядка с единственным вещественным полюсом и звено 2-го порядка, имеющее пару комплексно-сопряженных полюсов.

Последовательная ветвь фильтра должна иметь ничтожное сопротивление для постоянного тока и нижних частот; вместе с тем, для того чтобы высшие



частоты задерживались фильтром, последовательное сопротивление должно расти с частотой. Этим требованиям удовлетворяет индуктивность  $L$ , т.к.  $\dot{Z}_L = j\omega L$ .

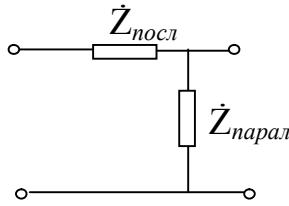


Рис. 6.4

Параллельная ветвь фильтра, наоборот, должна иметь малую проводимость для низких частот, с тем, чтобы токи этих частот не шунтировались параллельным плечом. Для высоких частот параллельная ветвь должна иметь большую проводимость, тогда колебания этих частот будут шунтироваться и ток на выходе будет ослаблен. Этим условиям отвечает емкость  $C$ , т.к.  $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ , т.е.

возможны следующие варианты:

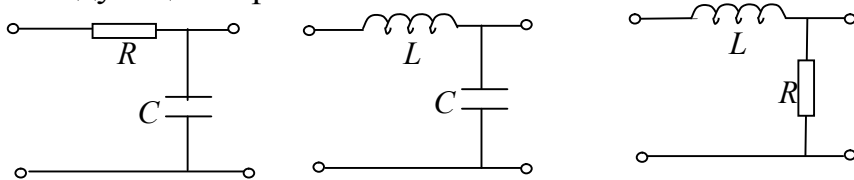
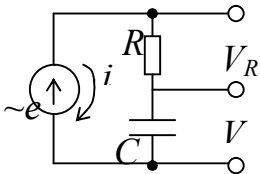


Рис. 6.5

- Последовательная RC-цепь.

По второму закону Кирхгофа,



$$\dot{V}_R + \dot{V}_C = \dot{e}(t),$$

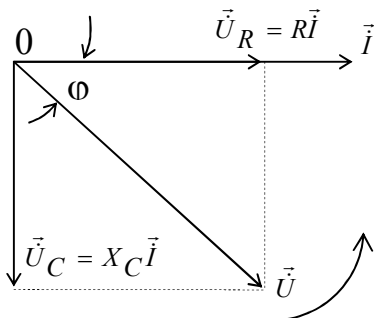
$$iR + \frac{1}{C} \int idt = e(t).$$

Рис. 6.6

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения решаем символическим методом, учитывая, что  $i = \dot{I}e^{j\omega t}$ ,  $e(t) = \dot{U}e^{j\omega t}$

$$R\dot{I}e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}e^{j\omega t} = \dot{U}e^{j\omega t},$$

Разделив обе части на  $e^{j\omega t}$ , имеем



$$R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \dot{U}, \tag{6.3}$$

или  $\vec{U}_R + \vec{U}_C = \vec{U}$ .

Здесь  $\vec{U}_R$  и  $\vec{U}_C$  - комплексные амплитуды напряжений на активном сопротивлении и емкости.

Вектор  $\vec{U}_R$  совпадает с током по фазе, вектор  $\vec{U}_C$  отстает от тока на  $\pi/2$ . Дело в том, что для емкости:

Рис. 6.7

если  $V_C = U_C \cos \omega t$ , тогда  $i_C = C \frac{dV_C}{dt} = -\omega C U_C \sin \omega t = \omega C U_C \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ , т.е. ток через емкость опережает напряжение на емкости.

Из диаграммы (рис.6.7) видно, что ток  $\dot{I}$  опережает по фазе приложенное напряжение  $\dot{U}$  на угол  $\varphi$ , который определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{X_C}{R}, \quad (6.4)$$

где  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ .

Решая (6.3) относительно  $\dot{I}$ , имеем, т.к.  $|X_C| = \frac{1}{\omega C}$ ,

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\dot{U}}{R - j \cdot \frac{1}{\omega C}} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_{ex}}.$$

а) Комплексное входное сопротивление

$$\dot{Z}_{ex} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R - j \frac{1}{\omega C} = R - j|X_C|.$$

Итак, у  $RC$ -цепи у емкости реактивное сопротивление отрицательно.

$$|\dot{Z}_{ex}| = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}}{\omega C}.$$

б) Частотные характеристики  $RC$ -цепи (ФНЧ)

$$\dot{K}_X(j\omega) = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{I \cdot \dot{Z}_{вых}}{I \cdot \dot{Z}_{вх}} = \frac{\dot{Z}_{вых}}{\dot{Z}_{вх}} = |\dot{K}_X(\omega)| e^{-j\varphi_C},$$

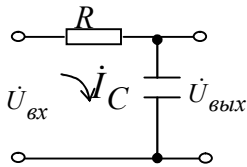


Рис. 6.8

где  $\varphi_C = \varphi_{вых} - \varphi_{вх}$  - сдвиг фаз между выходным и входным напряжением.  $\varphi_C > 0$ , если выходное напряжение отстает от входного.

$$|\dot{K}_X| = \sqrt{\operatorname{Im}^2 K_X + \operatorname{Re}^2 K_X}, \quad \varphi_C = \operatorname{arctg} \left( -\frac{\operatorname{Im} \dot{K}_X}{\operatorname{Re} \dot{K}_X} \right),$$

$$\dot{K}_X(j\omega) = \frac{\dot{Z}_X}{R + \dot{Z}_X} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\varphi_c = \operatorname{arctg} \omega RC, \quad (6.5)$$

$$|\dot{K}_X| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}}. \quad (6.6)$$

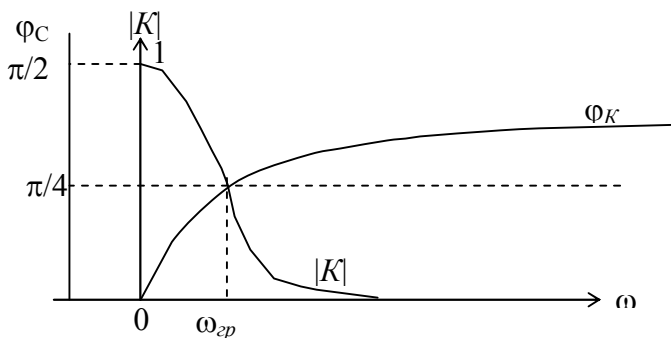


Рис. 6.9



Если учесть, что  $P_X = \frac{UI}{2}$ , ток через емкость  $I = \frac{U}{1/\omega C} = \frac{U}{|X_C|}$ , то

$$P_X = \frac{U^2}{2|X_C|} = \frac{U^2 \omega C}{2} = \omega W_{C \max},$$

где  $W_{C \max} = \frac{CU^2}{2}$  - максимально запасенная энергия в емкости.

Можно ввести понятие добротности цепи:  $Q = \frac{|P_X|}{P_R}$ . Отсюда  $Q = \frac{\omega |W_{C \max}|}{P_R}$ .

Так как  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , а  $PT = W_{RT}$ , то

$$Q = 2\pi \frac{W_{C \max}}{W_{RT}}.$$

Добротность пропорциональна отношению максимально запасенной энергии к энергии потерь, расходуемой за период.

### 6.2.2. ФВЧ (фильтр верхних частот)

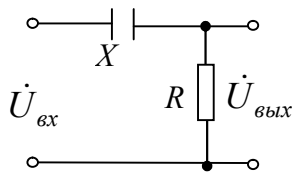


Рис. 6.10

Если в  $RC$  цепи выходным является напряжение на сопротивлении, то будет ФВЧ. Коэффициент передачи этого фильтра:

$$\dot{K}_R(j\omega) = \frac{\dot{Z}_{\text{вых}}}{\dot{Z}_{\text{вх}}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - j \cdot \frac{1}{\omega RC}} = \frac{1 + \frac{j}{\omega RC}}{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}},$$

$$\varphi_R = \text{arctg}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right), \quad (6.7)$$

$$|\dot{K}_R(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}}. \quad (6.8)$$

Коэффициент передачи этого фильтра можно представить в следующем виде:

$$\dot{K}_R = |\dot{K}_R| e^{-j\varphi_R},$$

где  $\varphi_R$  - сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями ( $\varphi_R > 0$ , если выходное напряжение отстает от входного).

Здесь величина  $RC = \tau$  имеет размерность времени и называется постоянной времени  $RC$  цепи.

Чем меньше постоянная времени  $\tau = RC$ , тем более пологой получается характеристика  $|\dot{K}(\omega)|$ .



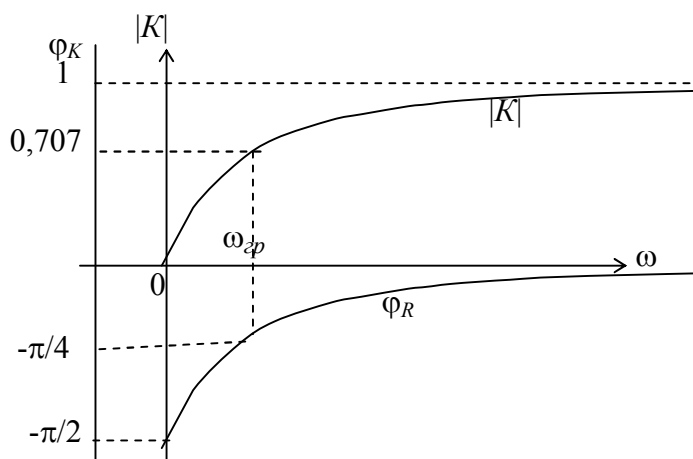


Рис. 6.11

Из выражений (6.6) и (6.8) видно, что частота, соответствующая границе полосы пропускания,

$$\omega_{cp} = 1/\tau \quad (6.9)$$

Этой частоте, соответствует фазовый угол  $\varphi_{cp} = \pi/4$ .

### 6.3. Полосовая фильтрация

Простейшим полосовым фильтром является колебательный контур, образованный элементами  $L$ ,  $C$  и  $R$ .

- Последовательный колебательный контур

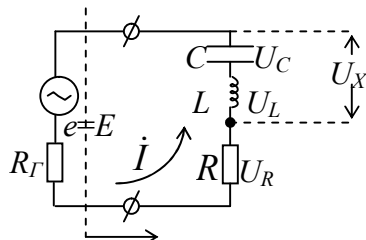


Рис. 6.12

Цепь второго порядка, составленная из последовательно соединенных  $L$ ,  $C$ ,  $R$  называется последовательным колебательным контуром. По второму закону Кирхгофа  $U_R + U_L + U_C = e$ .

Будем считать, что амплитуда напряжения на зажимах генератора не зависит от тока в цепи, это равносильно тому, что  $R_i = 0$  и  $U_i = E$  (генератор напряжения). По второму уравнению Кирхгофа

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int idt = e, \quad (6.6)$$

где  $e$  – мгновенное значение ЭДС генератора. Продифференцируем уравнение (6.6) по времени:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} i = \frac{de}{dt}. \quad (6.7)$$

Рассмотренные цепи, как видно из рис. 6.10 и 6.11 могут быть названы частотно-избирательными.

Полосой пропускания фильтров условно можно принять область частот, в которой отклик не становится меньше чем в  $\sqrt{2}$  раз, т.е.  $|K_{np}| = \frac{K_0}{\sqrt{2}} = 0,707$ .



Это неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Т.к. имеем дело с гармоническими колебаниями, запишем в символическом виде уравнение (6.6)  $i = \dot{I}e^{j\omega t}$ ,  $\dot{e} = \dot{E}e^{j\omega t}$ ,

$$R\dot{I}e^{j\omega t} + j\omega LIe^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}e^{j\omega t} = \dot{E}e^{j\omega t}.$$

$$\text{Делим на } e^{j\omega t}: \quad R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \dot{E}.$$

Отсюда

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{ex}}. \quad (6.8)$$

Здесь  $Z_{ex} = R_{ex} + jX_{ex}$ .

На рис. 6.13 изображены векторные диаграммы для нерезонансного и резонансного режимов.

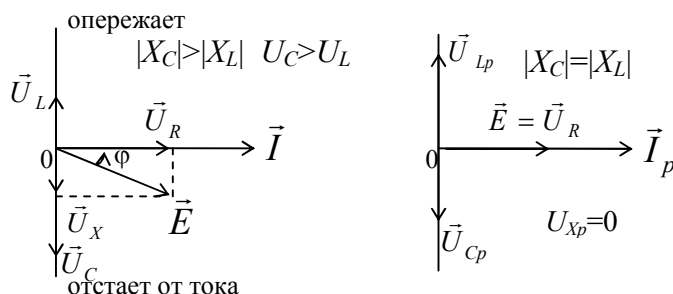


Рис. 6.13

При резонансе входное сопротивление чисто активное  $Z_{ex,p} = R$ .

Амплитуды напряжений на реактивных элементах равны  $U_{Lp} = U_{Cp}$ ,  $U_{Rp}$ .

Поэтому напряжение  $U_{Xp} = 0$  (при резонансе). Сдвиг между ЭДС и током в цепи  $\varphi = 0$ .

Резонанс получается при определенной частоте, которую находим из равенства

$$X_{LC} = 0; \quad \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0,$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ - угловая резонансная частота,}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 2\pi c\sqrt{LC}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

В настроенном контуре  $|X_L| = |X_C|$ ,

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \text{ т.к. } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \text{ то}$$

$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  - характеристическое сопротивление - это отношение амплитуд

напряжения и тока на каждом из реактивных элементов контура при резонансе.



а) Энергетические соотношения в последовательном контуре.

Мгновенные значения энергии, запасенные в индуктивности -  $W_L = \frac{Li^2}{2}$ ; в емкости  $W_C = \frac{Cv^2}{2}$ , причем при резонансе  $W_{Lp\max} = W_{Cp\max} = W_{зан}$  максимально запасенные энергии равны друг другу, т.к. при резонансе  $|X_L| = |X_C|$  и  $Z_{ex} = R$ .  
Добротность контура

$$Q = 2\pi \frac{W_{зан}}{W_{RT}}, \quad (6.9)$$

где  $W_{RT} = P_{nom} T_0 = \frac{P_{nom}}{f_0}$  - энергия, расходуемая за период  $T_0$ ;  $W_{max} = \frac{LI^2}{2}$ ,

$P_{nom} = \frac{1}{2} I^2 R$ . Отсюда, учитывая, что  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ , имеем

$$Q = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}. \quad (6.10)$$

Т.к. в радиодиапазоне  $\rho \approx$  сотни Ом,  $R \sim$  Омы, то  $Q \in 100 \div 300$ .

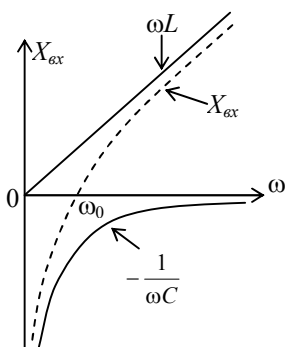
б) Частотная характеристика входного сопротивления последовательного колебательного контура

Рассмотрим частотные свойства входного сопротивления последовательного колебательного контура  $\dot{Z}_{ex} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ .

Активная составляющая  $R$  не зависит от частоты. Реактивная составляющая

$$X_{ex} = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left[ \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 \omega CL} \right] \quad (\text{см. рис. 6.14}),$$

т.к.  $\omega_0 L = \rho$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то



$$X_{ex} = \rho \left[ \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right], \quad (6.11)$$

$$\dot{Z}_{ex} = R + jX_{ex} = R \left( 1 + j \frac{X_{ex}}{R} \right). \quad (6.12)$$

Рис. 6.14



Обозначим  $\xi = \frac{X_{ex}}{R} = tg\varphi$ . Подставим в это выражение  $X_{ex}$  и, учитывая, что

$\frac{\rho}{R} = Q$ , имеем

$$\xi = Q \left[ \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right] - \text{обобщенная расстройка.} \quad (6.13)$$

Отсюда из (6.11), (6.12) и (6.13)

$$\dot{Z}_{ex} = R(1 + j\xi), \quad |\dot{Z}_{ex}| = R\sqrt{1 + \xi^2}, \quad \varphi = \text{arctg}\xi \quad (6.14)$$

Для малых расстроек ( $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ,  $\Delta\omega \rightarrow 0$ ) имеем:

$$\xi = Q \left[ \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right] = Q \left[ \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0} \right] = Q \left[ \frac{\omega_0^2 + 2\omega_0\Delta\omega + \Delta\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0} \right] \approx 2Q \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

$$\xi \approx 2Q \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Итак, в области малых расстроек (см. рис. 6.15)

$$|\dot{Z}_{ex}| \approx R \sqrt{1 + \left( 2Q \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2}, \quad (6.15)$$

$$\varphi \approx \text{arctg} \left( 2Q \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \approx 2Q \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0},$$

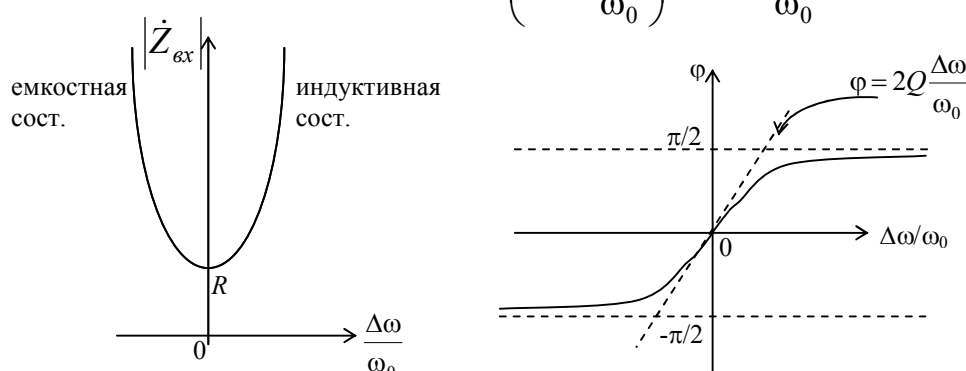


Рис. 6.15

Наклон фазовой характеристики определяется добротностью контура: чем выше добротность, тем больше крутизна.

в) Частотные характеристики токов.

Из уравнений (6.8) и (6.14) имеем

$$I = \frac{E}{|\dot{Z}_{ex}|} = \frac{E}{R\sqrt{1 + \xi^2}}. \text{ Поделив это выражение на значение тока при резонансе}$$

$$I_p = \frac{E}{R}, \text{ получим нормированную величину тока:}$$



$$n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{I}{I_p} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}, \quad (\text{см. рис. 6.16}).$$

Для области малых расстройк  $\frac{I}{I_p} = n\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{1+\left(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}.$  (6.16)

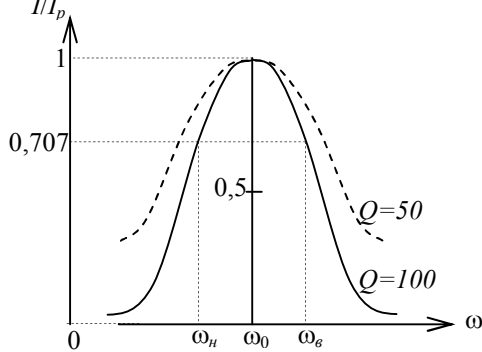


Рис. 6.16

г) Последовательный колебательный контур как четырехполюсник.

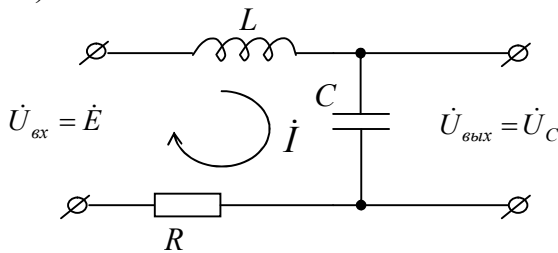


Рис. 6.17

Первоначально рассмотрим случай резонанса  $|X_{Lp}|=|X_{Cp}|=\rho$

$$\dot{U}_{Cp} = \dot{I} \cdot \dot{Z}_{Cp} \quad \dot{E} = \dot{I} \cdot \dot{Z}_{ex}$$

$$\dot{K}_{Cp}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{Cp}}{\dot{E}} = -\frac{j|X_{Cp}|}{\dot{Z}_{exp}} = -j\frac{|X_{Cp}|}{R}, \quad \text{т.к.} \quad |X_{Cp}|=\rho, \quad \rho/R=Q \quad \text{то}$$

$$\dot{K}_{Cp}(j\omega) = -j\frac{\rho}{R} = -jQ,$$

$$\boxed{\dot{K}_{Cp}(j\omega) = -jQ}. \quad (6.17)$$

Аналогично, если сигнал снимается с индуктивности

$$\boxed{\dot{K}_{Lp}(j\omega) = jQ}, \quad (6.18)$$

$$\text{т.е.} \quad |\dot{K}_U| = |\dot{K}_{Lp}| = |\dot{K}_{Cp}| = Q.$$

Итак, при резонансе последовательный колебательный контур усиливает подведенное напряжение в  $Q$  раз. Т.е. имеет место резонанс напряжений.

При съеме сигнала с емкости в случае расстроенного контура  $\omega \neq \omega_0$

$$\dot{K}_C(j\omega) = -\frac{j|X_C|}{\dot{Z}_{ex}} = \frac{-j}{\omega C \dot{Z}_{ex}} e^{-j\varphi}, \quad (6.19)$$

где  $\varphi$  – угол сдвига фаз между напряжением  $\dot{U}_{ex}$  и током  $\dot{I}$ .



Принимая во внимание, что  $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{ex}}$ ,  $I_p = \frac{E}{R}$ ,  $n = \frac{\dot{I}}{I_p} = \frac{R}{\dot{Z}_{ex}}$ , т.е.  $\dot{Z}_{ex} = \frac{R}{n(\omega)}$ , отсюда

$$\text{из (6.19) } \dot{K}_C(j\omega) = \frac{-jn(\omega)}{\omega CR} e^{-j\varphi}.$$

Умножив и разделив выражение  $\dot{K}_C(j\omega)$  на  $\omega_0$ , имеем  $\dot{K}_C(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{-jn(\omega)}{\omega CR} e^{-j\varphi}$ . Т.к.

$$\frac{1}{\omega_0 CR} = Q, \quad \boxed{\dot{K}_C = n(\omega) \frac{\omega_0}{\omega} Q e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}}. \quad (6.19')$$

Аналогично для коэффициента передачи при съеме сигнала с индуктивности

$$\boxed{\dot{K}_L(j\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{\omega_0} Q e^{-j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}}. \quad (6.20)$$

В области малых расстроек, когда  $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$ ,  $|\dot{K}_L| = |\dot{K}_C| \approx Qn = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}}$  (см. рис.6.18).

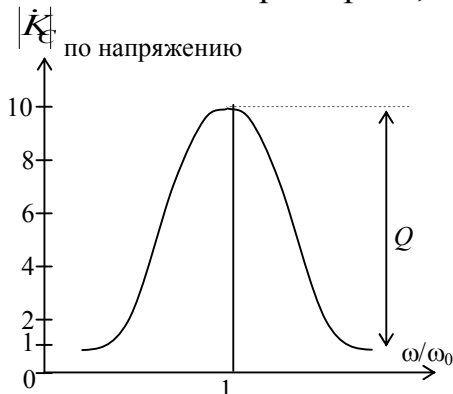


Рис. 6.18

- Параллельный колебательный контур

Согласно первому закону Кирхгофа,

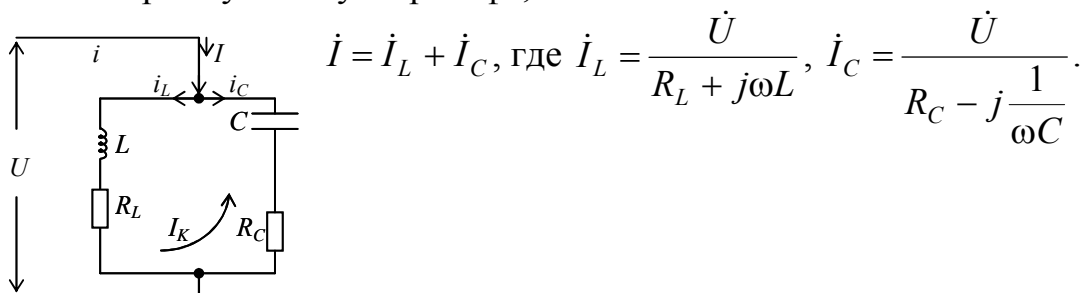


Рис. 6.19

В зависимости от соотношения индуктивного и емкостного сопротивления входное сопротивление может иметь как емкостной, так и индуктивный характер.

Обычно  $R_L \ll \omega L$ ,  $R_C \ll 1/\omega C$ ,  $R_L \ll \rho$ ,  $R_C \ll \rho$ , где  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , т.е. в первом приближении можно пренебречь потерями.



а) При резонансе  $X_L = X_C$ , т.е. когда  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ , токи индуктивной ветви  $I_L \approx \frac{U}{\omega_0 L}$  и емкостной ветви  $I_C \approx \omega_0 C U$  практически не отличаются друг от друга, но сдвиг по фазе между ними близок к  $180^\circ$ , поэтому результирующий ток

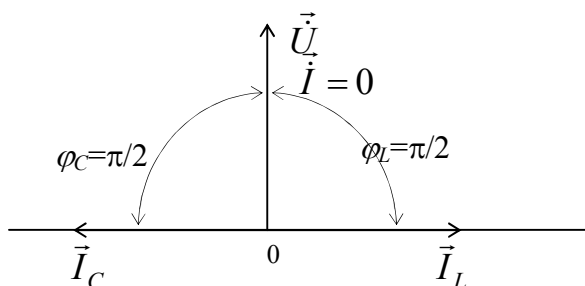


Рис. 6.20

$I \approx 0$ , а по фазе совпадает с напряжением (рис. 6.20).

В режиме резонанса:

$I_{Lp} \approx I_{Cp} \approx \frac{U}{\rho} = I_K$  и противоположны по фазе, а ток  $I=0$ , т.е. контур не потребляет тока, а  $Z_{ex} = \infty$ .

б) Частотные характеристики входного сопротивления параллельного контура.

$$\dot{Z}_{ex\text{пар}} = \frac{(R_L + j\omega L) \left( R_C - j\frac{1}{\omega C} \right)}{R_L + R_C + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)},$$

т.к.  $R_L \ll \omega L$ ,  $R_C \ll 1/\omega C$ , получим  $\dot{Z}_{ex\text{пар}} \approx \frac{\frac{L}{C}}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$ , где  $R = R_L + R_C$ .

Знаменатель совпадает с величиной  $\dot{Z}_{ex.\text{посл.}} = R(1 + j\xi)$ . Т.к.  $\frac{L}{C} = \rho^2$ , имеем

$$\dot{Z}_{ex\text{пар}} \approx \frac{\rho^2}{\dot{Z}_{ex\text{посл}}}, \text{ т.е. } \boxed{\dot{Z}_{ex\text{пар}} \approx \frac{\rho^2}{R(1 + j\xi)}}.$$

Т.к.  $\xi = Q \left[ \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right]$ , отсюда видно, что при  $\xi=0$  (при резонансе)

$$Z_{ex\text{пар}} \approx \frac{\rho^2}{R} = R_{э\text{кв}} - \text{чисто активное.}$$

Учитывая, что

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}, \quad (6.21)$$

Имеем

$$R_{э\text{кв}} = \frac{\rho^2}{R} = Q\rho = \frac{1}{\omega_0^2 C^2 R} = \frac{\omega_0^2 L^2}{R}. \quad (6.22)$$



Т.к. реально в радиодиапазоне  $Q \approx 200 \div 400$ ,  $\rho \approx 100 \div 500$  Ом, то  $R_{\text{экв}} \approx (20 \div 200)$  кОм.

Найдем АЧХ и ФЧХ входного импеданса параллельного контура, если  $\omega \neq \omega_0$  (рис. 6.21 и 6.22)

$$\dot{Z}_{\text{вх.пар.}} = \frac{R_{\text{экв}}}{(1 + j\xi)} = \frac{R_{\text{экв}}}{1 + \xi^2} - j \frac{\xi R_{\text{экв}}}{1 + \xi^2}, \quad (6.23)$$

$$R_{\text{вх.пар.}} = \frac{R_{\text{экв}}}{1 + \xi^2}, \quad X_{\text{вх.пар.}} = -\frac{\xi R_{\text{экв}}}{1 + \xi^2}, \quad |\dot{Z}_{\text{вх.пар.}}| = \frac{R_{\text{экв}}}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

При малых расстройках, т.к.

$$\xi = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \frac{\omega_0^2 + 2\Delta\omega\omega_0 + \Delta\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \cdot \omega} \approx Q \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \quad \text{при } \Delta\omega \rightarrow 0, \text{ то}$$

$$|\dot{Z}_{\text{вх.пар.}}| = \frac{R_{\text{экв}}}{\sqrt{1 + \left( 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2}}. \quad (6.24)$$

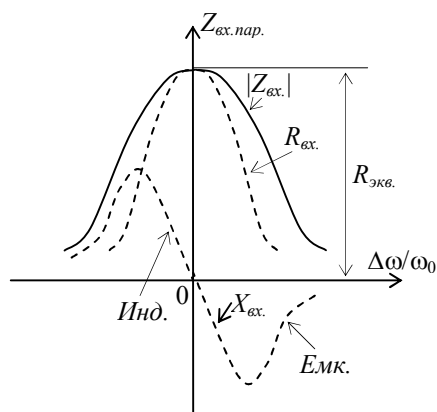


Рис. 6.21

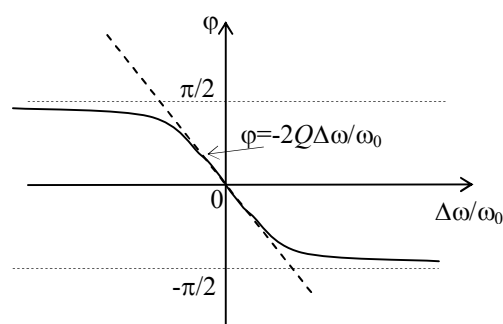


Рис. 6.22

Итак, настроенный контур ( $\Delta\omega=0$ ) представляет собой чисто активное сопротивление, равное  $R_{\text{экв}} = Q\rho$ .

Фазовая характеристика

$$\text{tg } \varphi_{\text{пар}} = \frac{X_{\text{вх.}}}{R_{\text{вх.}}} = -\xi = -Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (6.25)$$

имеет знак, противоположный знаку фазовой характеристики последовательного контура

$$\text{tg } \varphi_{\text{послед.}} = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

в) Частотные характеристики токов и напряжений в параллельном контуре.

Будем считать, что амплитуда тока, питающего контур, постоянна (что эквивалентно питанию от генератора тока).

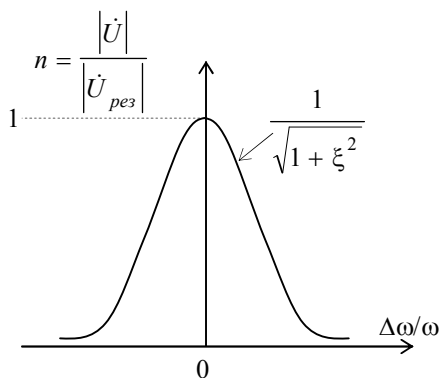
Комплексная амплитуда напряжения на контуре



$$\dot{U} = i\dot{Z}_{ex} = \frac{iR_{экв}}{1 + j\xi}. \quad (6.26)$$

Если  $I = \text{const}$ , то напряжение на контуре зависит от частоты также, как входное сопротивление

$$n(\omega) = \frac{|\dot{U}|}{|\dot{U}_{рез}|} = \frac{|\dot{Z}_{ex}|}{R_{экв}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} - \text{предельная резонансная кривая (рис. 6.23)}.$$



В области малых расстройк  $\frac{\omega_0}{\omega} \approx 1$ , следовательно, при резонансе имеем  $|\dot{Z}_{ex}| = R_{экв} = Q\rho$ ;  $n(\omega) = 1$ .

$\frac{I_{Lp}}{I} = \frac{I_{Cp}}{I} = \frac{I_K}{I} = Q$ , т.е. ток в контуре  $I_K$  превосходит ток  $I$  неразветвленной части в  $Q$  раз. В контуре имеет место резонанс токов.

Рис. 6.23

г) Сравнение последовательного и параллельного контуров. В таблице сформулированы основные параметры контуров.

|   |  |
|---|--|
| <p> <math> \dot{Z}_{ex}  = R\sqrt{1 + \xi^2}</math><br/> <math>\dot{Z}_{ex} = R + j\xi R</math><br/> <math>R_{ex} = R</math><br/> <math>R_{рез} = R</math> (Омы)         </p> | <p> <math> \dot{Z}_{ex}  = \frac{R_{экв}}{\sqrt{1 + \xi^2}}</math><br/> <math>\dot{Z}_{ex} = \frac{R_{экв}}{1 + \xi^2} - j \frac{\xi R_{экв}}{1 + \xi^2}</math><br/> <math>R_{экв} = R_{рез} = Q\rho</math> (сотни кОм)         </p> |
| <p> <math>\varphi = 2Q\Delta\omega/\omega_0</math> </p>   | <p> <math>\varphi = -2Q\Delta\omega/\omega_0</math> </p>   |



|  |   |
|--|---|
| $n = \frac{I}{I_{рез}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}; I_{рез} = \frac{E}{R}$                          | $n = \frac{U}{U_{рез}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}; U_{рез} = IR_{экр}$                                      |
| Максимум тока в контуре при $\omega = \omega_0$  | Максимум напряжения на контуре при $\omega = \omega_0$  |
| Резонанс напряжений усиливает подводимое напряжение в $Q$ раз<br>$\frac{U_L}{E} = \frac{U_C}{E} = Q$ | Резонанс токов усиливает подводимый ток в $Q$ раз<br>$\frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{I_{конт}}{I} = Q$ |

#### 6.4. Условия безыскаженной передачи сигнала через электрическую цепь

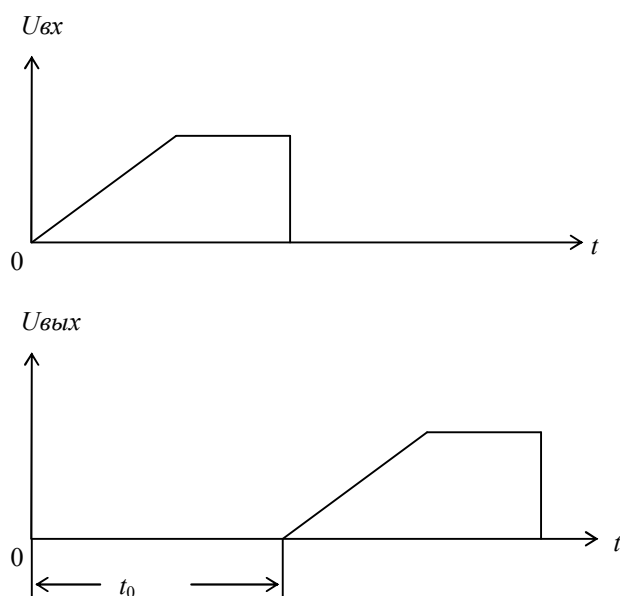


Рис. 6.24

Таким образом, комплексная передаточная функция имеет вид:

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{S}_{вых}(j\omega)}{\dot{S}_{вх}(j\omega)} = Ke^{-j\omega t_0}.$$

По определению,

$$|\dot{K}(j\omega)| = K - \text{АЧХ},$$

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0 - \text{ФЧХ}.$$

Установим требования к частотным характеристикам электрической цепи, при выполнении которых сигнал не искажается. При этом считаются допустимыми «задержки» сигнала цепью на некоторое время  $t_0$  и пропорциональное изменение значений сигнала на выходе цепи. Это означает, что  $U_{вых}(t) = kU_{вх}(t - t_0)$ . Если цепь удовлетворяет этим требованиям безыскаженной передачи, то  $\dot{S}_{вых}(j\omega) = k\dot{S}_{вх}(j\omega)e^{-j\omega t_0}$ , это является прямым следствием теоремы запаздывания.

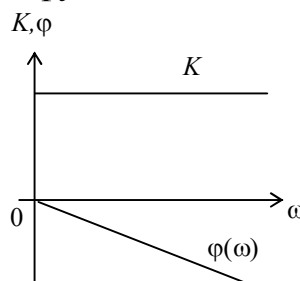


Рис. 6.25

Найденные условия безыскаженной передачи хорошо иллюстрируют основные понятия, связанные с применением интеграла Фурье.

Действительно, постоянство АЧХ в пределах рабочей полосы сигнала приводит к сохранению соотношения между частотными составляющими спектра



сигнала, т.е. к пропорциональному изменению спектральной плотности амплитуд реакции относительно воздействия.

Линейность же фазо-частотной характеристики ведет к пропорциональному сдвигу начальных фаз частотных составляющих, поскольку при  $\varphi(\omega) = -\omega t_0$  имеем:  $\cos[\omega t + \varphi(\omega)] = \cos \omega(t - t_0)$ , чему соответствует лишь смещение начала отсчета времени  $t_0$ .

Условия безыскаженной передачи всегда выполняются в резистивных электрических цепях, где  $-1 \leq K \leq 1$ , а  $t_0 = 0$ .

## 7. Линейные цепи с переменными параметрами

Если электрическая цепь содержит хотя бы один или несколько линейных элементов (сопротивлений, индуктивностей, емкостей), параметры которых изменяются во времени под воздействием внешних причин, то такая цепь называется цепью с переменными параметрами или параметрической цепью.

### 7.1. Линейные параметрические двухполюсники

Рассмотрим двухполюсники  $y = p(t)X$  в виде изменяемых во времени сопротивления  $R$ , емкости  $C$  и индуктивности  $L$ .

Для сопротивления  $p = 1/R = G(t)$ ,  $X = U$ ,  $y = i$ ,  $i = U/R(t)$ ,  $i = G(t)U(t)$ .

Для емкости  $p = C(t)$ ,  $X = U_C$ ,  $y = q$ ,  $q(t) = C(t)U(t)$ ,

$$\text{отсюда } i(t) = \frac{dq}{dt} = C(t) \frac{dU}{dt} + U \frac{dC(t)}{dt} \quad (7.1)$$

Первое слагаемое обусловлено изменением напряжения, а второе – изменением емкости во времени. Для емкости с постоянным параметром второе слагаемое равно нулю и характеристика элемента имеет вид, который принимается в теории линейных цепей с постоянными параметрами. Добавочное слагаемое, вызываемое изменением емкости, существенно изменяет характеристику элемента. Так, при  $U = \text{const}$ , первое слагаемое равно нулю, а второе слагаемое представляет собой переменный ток.

Для индуктивности  $p = L(t)$ ,  $X = i$ ,  $y = \phi$ , маг. поток  $\phi(t) = L(t)i(t)$

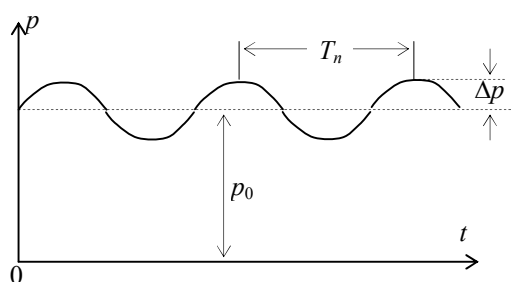
Для параметрической индуктивности вебер-амперная характеристика: маг.поток  $\phi(t) = L(t)i(t)$ , т.е. угловой коэффициент  $p$  равен индуктивности в данный момент времени. Здесь:

$$U = \frac{d\phi}{dt} = L(t) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(t)}{dt}. \quad (7.2)$$

Первое слагаемое обусловлено изменением тока, второе – изменением индуктивности во времени. Интересно, что если на входе ток постоянный, то на выходе имеем переменное напряжение (второе слагаемое).



Вид функции  $p(t)$  может быть произвольным. Наибольший интерес представляет тот случай, когда  $p(t)$  – гармоническая функция времени.



$p(t) = p_0 + \Delta p \cos \omega_n(t) = p_0(1 + m_n \cos \omega_n t)$ ,  
 где  $p_0$  – постоянная слагающая (среднее значение) параметра,  $\Delta p$  – амплитуда переменной слагающей,  $m_n = \frac{\Delta p}{p_0}$  – коэффициент вариации параметра.

Рис. 7.1

Если параметр изменяется во времени по сложному периодическому закону, то

$$p(t) = p_0 + \Delta p_1 \cos(\omega_n t + \psi_1) + \Delta p_2 \cos(2\omega_n t + \psi_2) + \dots = p_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos(k\omega_n t + \psi_k) \right) \quad (7.3)$$

Здесь  $m_k$  парциальный коэффициент изменения параметра, равный отношению  $k$ -ой гармоники  $\Delta p_k$  к среднему значению параметра  $p_0$ , а именно,  $m_k = \frac{\Delta p_k}{p_0}$ ;  $\omega_n$  – основная частота изменения параметра.

Пример. Если  $i(t) = G(t)U(t)$ ,  $U(t) = \cos \omega t$ ,  $G(t) = G_0(1 + m_n \cos \omega_n t)$

$$i(t) = G_0 \cos \omega t (1 + m_n \cos \omega_n t) = G_0 \cos \omega t + \frac{G_0 m_n}{2} [\cos(\omega + \omega_n)t + \cos(\omega - \omega_n)t].$$

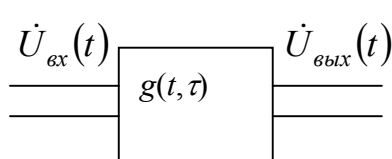
Т.е. появляются суммарные и разностные частоты.

Таким образом, линейная параметрическая цепь обладает свойствами, позволяющими получать комбинационные частоты.

## 7.2. Линейный параметрический четырехполюсник

а) Временные характеристики параметрических четырехполюсников

Приложенное ко входу параметрического четырехполюсника напряжение  $\dot{U}_{ex}(t)$  может быть представлено в виде суммы “взвешенных” смещенных во времени  $\delta$  импульсов  $\dot{U}_{ex}(t) = \int_{-\infty}^t \dot{U}_{ex}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ .



Выходное напряжение  $U_{вых}(t)$  можно по-прежнему определить как сумму реакций четырехполюсника на каждый  $\delta$  импульс в отдельности, а четырехполюсник характеризовать импульсной характеристикой.

Рис. 7.2

Однако, т.к. параметры элементов четырехполюсника со временем изменяются, то импульсная характеристика четырехполюсника зависит не только от времени  $t$ , но и от момента воздействия  $\delta$  импульса  $\tau$ , т.е.  $g(t, \tau)$ .



По мере течения времени  $t$  и “прихода”  $\delta$  импульса, составляющего  $U_{ex}(t)$ , импульсная характеристика не просто смещается, не изменяя своей формы (рис. 7.3-а), как это было в системах с постоянными параметрами, но и изменяет свой вид (рис. 7.3-б).

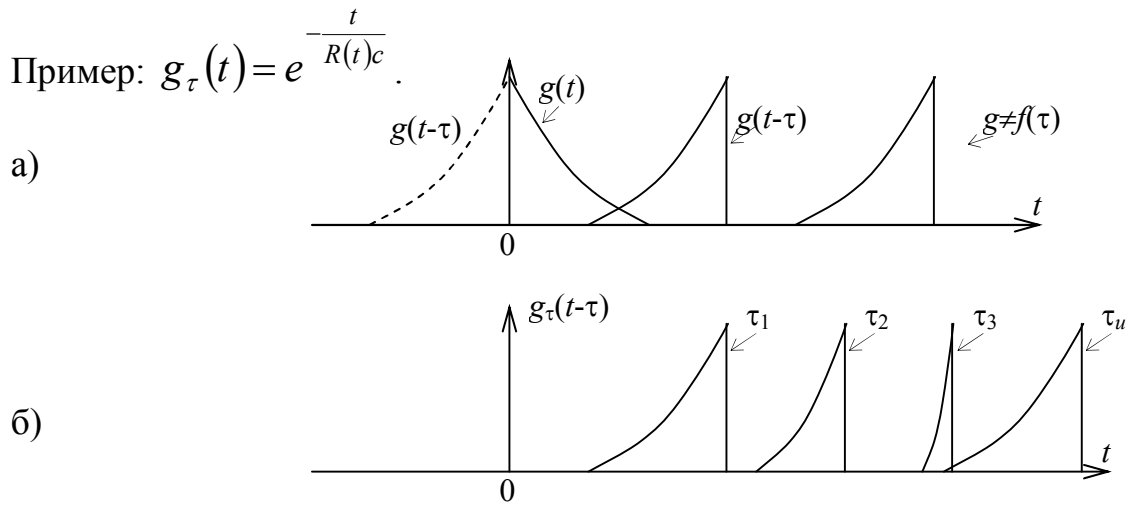


Рис.7.3

Поэтому для выходного напряжения  $U_{вых}(t)$  необходимо записать интеграл Дюамеля в другом виде:

$$\dot{U}_{вых}(t) = \int_{-\infty}^t \dot{U}_{ex}(\tau) g_{\tau}(t-\tau, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \dot{U}_{ex}(\tau) g_{\tau}(t, \tau) d\tau, \quad (7.4)$$

где  $g_{\tau}(t, \tau) = g_{\tau}(t-\tau, \tau)$  – импульсная характеристика четырехполюсника, зависящая не только от времени, но и от момента воздействия импульса.

В данном случае, как и прежде, выполняются условия физической реализуемости:

$$\begin{cases} g_{\tau}(t, \tau) = 0, & \text{при } t < 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} g_{\tau}(t, \tau) = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Обычно аналитического метода отыскания импульсной характеристики параметрических четырехполюсников пригодного для всех случаев, не существует, т.к. эта задача сводится к нахождению решений дифференциальных уравнений с переменными параметрами. Задача упрощается для систем, параметры которых изменяются медленно. В общем случае это означает, что коэффициенты дифференциальных уравнений не успевают существенно измениться за интервал времени, в течение которого импульсная характеристика существенно отличается от нуля (этот интервал часто называют памятью четырехполюсника).

б) Частотные характеристики параметрического четырехполюсника.

По аналогии с системой с постоянными параметрами можно записать

$$\dot{K}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\tau}(\tau, t) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7.6)$$



$$\text{Тогда } \dot{U}_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{вх}}(\omega) \dot{K}(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega.$$

Выражение (7.6) – прямое преобразование Фурье по переменной  $\tau$  для импульсной характеристики параметрического четырехполюсника – коэффициент передачи. Таким образом, коэффициент передачи параметрического четырехполюсника есть функция не только частоты, но и времени.

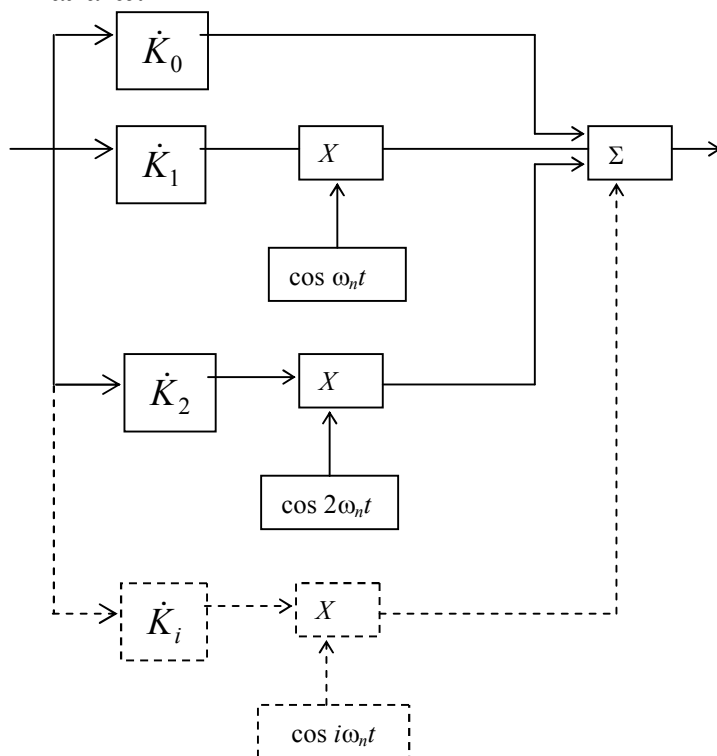
Наряду с выражением (7.6) можно дать еще одно определение передаточной функции  $\dot{K}(j\omega, t)$ , которое в некоторых задачах позволяет избежать обращения к импульсной характеристике. Если передаточная функция  $\dot{K}(j\omega, t)$  изменяется во времени по периодическому закону, то при периоде  $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$  функцию  $\dot{K}(j\omega, t)$

можно представить в виде ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \dot{K}(j\omega, t) = & \dot{K}_0(j\omega) + \dot{K}_1(j\omega)\cos(\omega_n t + \varphi_1) + \\ & + \dot{K}_2(j\omega)\cos(2\omega_n t + \varphi_2) + \dots, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где  $\dot{K}_0(j\omega)$ ,  $\dot{K}_i(j\omega)$  - не зависящие от времени коэффициенты (в общем случае комплексные), которые можно истолковать как передаточные функции некоторых четырехполюсников с постоянными параметрами.

Произведение  $\dot{K}_i(j\omega)\cos(i\omega_n t + \varphi_i)$  можно рассматривать как передаточную функцию каскадного включения двух четырехполюсников: одного с не зависящей от времени передаточной функцией  $\dot{K}_i(j\omega)$ , второго - с передаточной функцией  $\cos(i\omega_n t + \varphi_i)$ , изменяющейся во времени, но не зависящей от частоты входного сигнала  $\omega$ .



Выражение (7.7) представлено эквивалентной схемой рис. 7.4.

Рис.7.4



Пример:

Пусть  $U_{ex} = \cos \omega t$ , тогда

$$U_{вых}(t) = K(j\omega, t)U_{ex}(t) = K_0(j\omega)\cos \omega t + K_1(j\omega)\cos \omega t \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \\ + K_2(j\omega)\cos \omega t \cos(2\omega_n t + \varphi_n) + \dots = K_0(\omega)\cos \omega t + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} K_m(\omega) \{ \cos[(\omega + m\omega_n)t + \varphi_n] + \cos[(\omega - m\omega_n)t - \varphi_n] \}.$$

Т.е. в линейной системе с переменным параметром появляются комбинационные частоты.

## 8. Введение в теорию нелинейных цепей

В теории линейных цепей предполагается, что параметры всех сосредоточенных элементов – резистивных, емкостных, индуктивных, являются величинами, не зависящими от токов и напряжений.

Существует обширный класс исключительно важных элементов и устройств, параметры которых существенно зависят от токов и напряжений – это нелинейные элементы. Для количественного описания свойств нелинейных элементов необходимо задавать зависимости, называемые характеристиками. Полное математическое описание таких цепей – нелинейное дифференциальное уравнение. Для них характерно невыполнение принципа суперпозиции.

### 8.1. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов. Нелинейное преобразование формы сигнала.

Функция  $y=f(x)$  обычно задается графиком, построенным на основании экспериментально полученных данных. Между тем для расчетов необходимо располагать хотя бы приближенным аналитическим выражением его характеристики.

Процесс составления аналитического выражения графически заданной характеристики, называемый аппроксимацией, должен проводиться так, чтобы с одной стороны, уравнение  $y=f(x)$  достаточно точно отражало данные эксперимента, и, с другой стороны, чтобы расчеты в результате не были очень громоздкими.

Обычно задача аппроксимации распадается на две самостоятельные задачи:

- 1) выбор класса функций;
- 2) определение коэффициентов аппроксимации.

Задача выбора класса функций не имеет однозначного решения. Класс функций выбирается по схожести той или иной функции с аппроксимируемой характеристикой и из соображений, связанных с дальнейшим использованием выбранной функции.



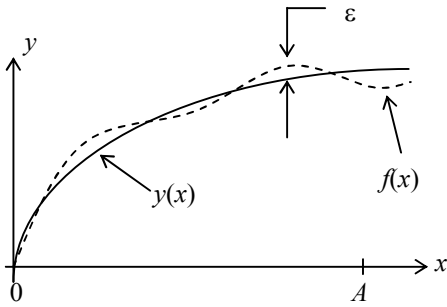


Рис.8.1

Для определения коэффициентов аппроксимации нужно конкретизировать условия аппроксимации, т.е. уточнить количественно смысл приближения. Например:

– равномерное приближение

$$|y(x) - f(x)| \leq \varepsilon; \quad (8.1)$$

- средне-квадратичное приближение

$$\left[ \frac{1}{A} \int_0^A [y(x) - f(x)]^2 dx \right]^{1/2} \leq \delta, \quad (8.2)$$

где  $0 - A$  – интервал аппроксимации – рабочий участок.

Чем меньше рабочий участок, тем более высокая точность может быть достигнута.

Пользуясь той или иной аппроксимацией реальной характеристики нелинейного элемента, можно при заданном входном воздействии найти аналитическое выражение, описывающее выходной эффект. Покажем это на примере.

Пример: Аппроксимация характеристики задана полиномом третьей степени  $i = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + a_3(u - U_0)^3$ .

На входе нелинейного элемента действует напряжение  $u = U_{ex}(t) + U_0$ ,

где  $U_{ex}(t) = \begin{cases} bt & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$

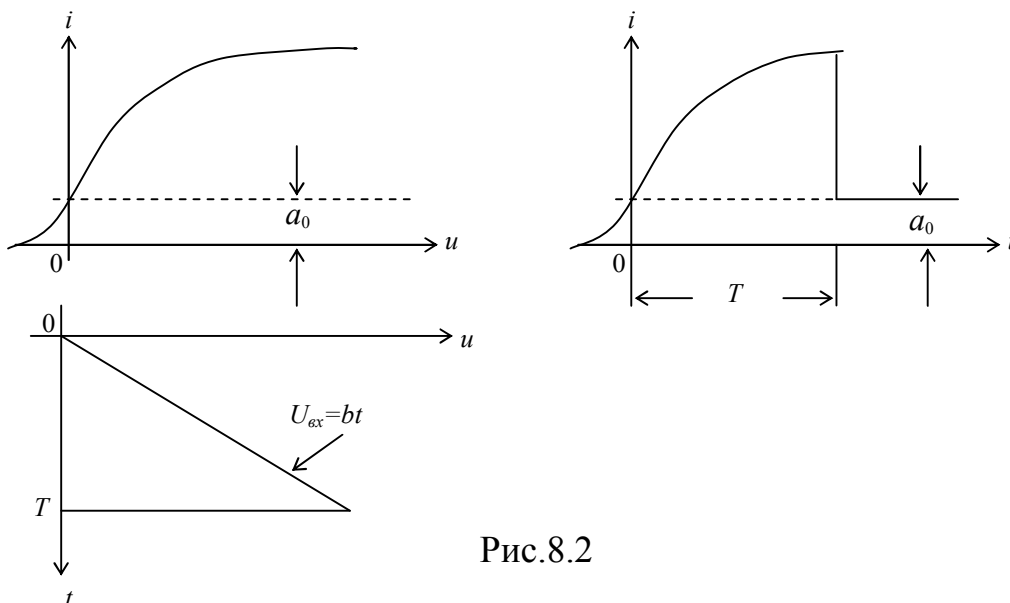


Рис.8.2



Под действием такого напряжения

$$i(t) = \begin{cases} a_0 + a_1 bt + a_2 (bt)^2 + a_3 (bt)^3 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ a_0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

При заданной аппроксимации характеристики, наряду с составляющей  $a_1 bt$ , пропорциональной входному воздействию, в составе тока появляются два слагаемых, являющихся продуктом нелинейности характеристики.

## 8.2. Нелинейное преобразование спектра сигнала

Как было показано в примере, нелинейный элемент преобразует колебание, в результате чего выходной эффект обладает иными спектральными свойствами.

Спектральная функция входного воздействия

$$\dot{S}_{вх}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (8.3)$$

Спектральная функция выходного эффекта в нелинейном каскаде с характеристикой  $y=f(x)$  имеет вид:

$$\dot{S}_{вых}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f[x(t)] e^{-j\omega t} dt, \quad (8.4)$$

т.е. определяется не только сигналом на входе, но и аналитическим выражением функции, аппроксимирующей характеристику нелинейного элемента.

Выражения (8.3) и (8.4) отражают нелинейное преобразование спектральной функции сигнала при прохождении его через нелинейный элемент.

Наиболее показателен этот факт на примере воздействия на нелинейность гармонического колебания. На рис. 8.3 приведено построение функции  $y=f(x \cos \omega t)$  для двух типов нелинейности. Т.к.  $y(t)$  периодическая функция времени, она может быть представлена в виде ряда Фурье.

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k), \quad (8.5)$$

где  $Y_{km}$  – амплитуда  $k$ -ой гармоники,  $\varphi_k$  – начальная фаза,  $y_0$  – постоянная составляющая.

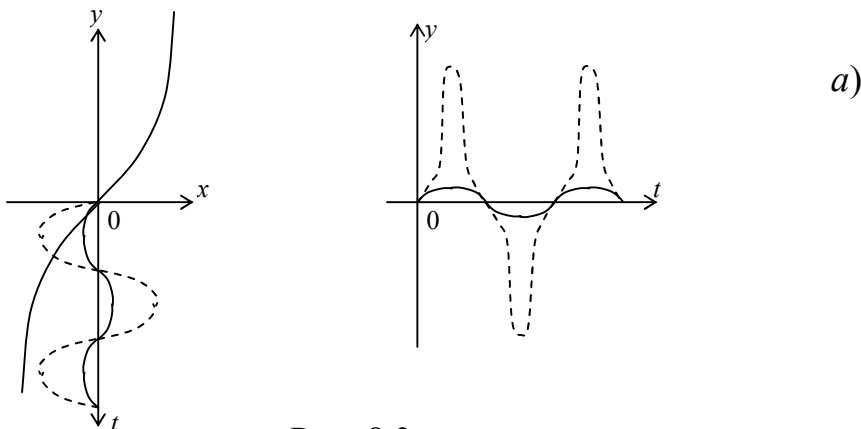


Рис. 8.3-а



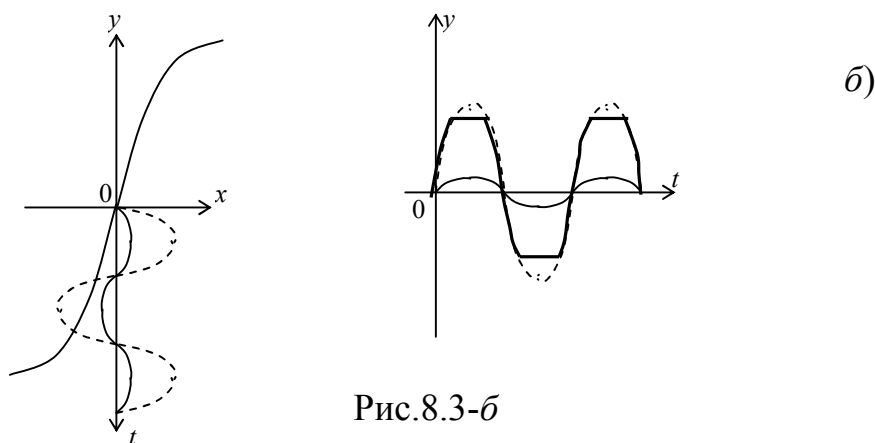


Рис.8.3-б

Если бы характеристика элемента была линейной, то функция  $y(t)$  содержала бы только одну гармоническую составляющую частоты  $\omega$  ( $k=1$ ).

Все остальные составляющие появились как следствие нелинейности характеристики и составляют продукт нелинейности

$$y_H(t) = y_0 + \sum_{k=2}^{\infty} y_{km} \cos(k\omega t - \varphi_k). \quad (8.6)$$

Итак, нелинейные элементы обладают замечательным свойством органического преобразования частоты, заключающегося в том, что в нелинейных системах спектральная функция отклика содержит новые частоты, которых нет в функции воздействия.

Чем больше нелинейность функции  $y=f(x)$ , тем протяженнее гармонический ряд, и тем медленнее убывают с ростом  $k$  амплитуды гармоник.

Отметим, что т.к. высшая степень аппроксимации характеризует меру нелинейности характеристики элемента, то именно этой мерой определяется протяженность спектра преобразованного сигнала, его наивысшая частота. Чем более нелинейна характеристика, тем более протяженный спектр выходного сигнала.

### 8.3. Нелинейные искажения

Наличие нелинейности в вольт-амперной характеристике приводит к нелинейным искажениям. Покажем это на примере тонально модулированного АМ сигнала.

$$\begin{aligned} i &= a_0 + a_1 u + a_3 u^3, \\ u &= U_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \\ i &= a_0 + a_1 U_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t + \\ &+ a_3 U_0^3(1 + m \cos \Omega t)^3 \frac{1}{4}(3 \cos \omega_0 t + \cos 3\omega_0 t). \end{aligned}$$

На частоте  $\omega_0$



$$\begin{aligned}
I_{\omega_0} &= a_1 U_0 (1 + m \cos \Omega t) + \frac{3}{4} a_3 U_0^3 (1 + 3m \cos \Omega t + 3m^2 \cos^2 \Omega t + m^3 \cos^3 \Omega t) = \\
&= a_1 U_0 + a_1 U_0 m \cos \Omega t + \\
&+ \left[ a_3 U_0^3 + 3a_3 U_0^3 m \cos \Omega t + 3 \frac{a_3 m^2 U_0^3}{2} (1 + \cos 2\Omega t) + \frac{a_3 m^3 U_0^3}{4} (3 \cos \Omega t + \cos 3\Omega t) \right] \cdot \frac{3}{4} = \\
&= a_1 U_0 + \frac{3}{4} a_3 U_0^3 + \frac{9}{8} a_3 m^2 U_0^3 + \left( a_1 U_0 m + \frac{9a_3 m U_0^3}{4} + \frac{9a_3 m^3 U_0^3}{8} \right) \cos \Omega t + \\
&+ \frac{9a_3 m^2 U_0^3}{8} \cos 2\Omega t + \frac{3a_3 m^3 U_0^3}{16} \cos 3\Omega t.
\end{aligned}$$

В ряде случаев нелинейные искажения нежелательны. Количественно мерой этих искажений может служить коэффициент нелинейных искажений как отношение действующего значения всех высших гармоник отклика к действующему значению первой гармоники,

$$K_{\partial} = \frac{\sqrt{y_{2\partial}^2 + y_{3\partial}^2 + \dots}}{y_{\partial 1}}. \quad (8.7)$$

Следует только подчеркнуть одну особенность нелинейных преобразований импульсов и их спектральных функций.

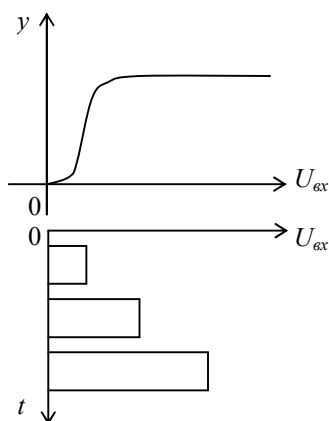


Рис. 8.4

Как следует из геометрического построения, чем ближе форма воздействующего импульса к прямоугольной, тем меньше она претерпевает изменения при нелинейном преобразовании. В пределе импульс прямоугольной формы, проходя через нелинейную цепь, не изменяет своей формы. Следовательно, не меняется и вид его спектральной функции. Таким образом, спектральная функция вида  $\frac{e^{-j\omega T}}{j\omega}$  является устойчивой при нелинейных преобразованиях.



## 8.4. Безынерционное нелинейное преобразование суммы гармонических колебаний

### 8.4.1. Комбинационные частоты

Свойство нелинейной цепи обогащать спектр, создавая спектральные составляющие, первоначально отсутствующие на входе, проявляется, если входной сигнал представляет собой сумму некоторого числа гармонических составляющих с различными частотами.

Рассмотрим для простоты нелинейный двухполюсник, вольт-амперная характеристика (ВАХ) которого описывается полиномом второй степени:

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2.$$

На вход поступает напряжение в виде бигармонического воздействия  $u = U_0 + U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t$ ,

тогда

$$i(t) = a_0 + \frac{1}{2} a_2 (U_1^2 + U_2^2) + a_2 U_1 U_2 \cos(\omega_1 - \omega_2) + a_1 U_1 \cos \omega_1 t + \\ + a_1 U_2 \cos \omega_2 t + \frac{1}{2} a_2 U_1^2 \cos 2\omega_1 t + a_2 U_1 U_2 \cos(\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{2} a_2 U_2^2 \cos 2\omega_2 t.$$

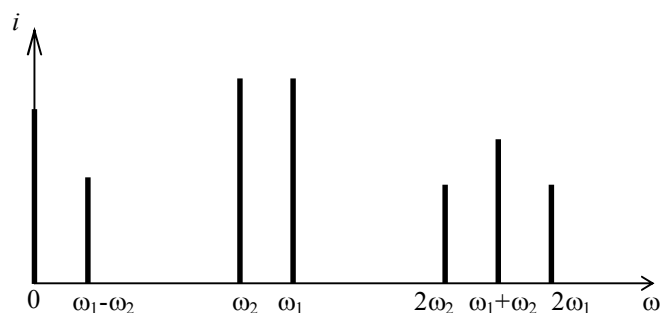


Рис. 8.5

Из рис. 8.5 видно, что в составе тока присутствуют слагаемые, как встречавшиеся ранее — постоянные составляющие, первые гармоники, так и вторые гармоники и комбинационные частоты. Из-за нелинейности в нем происходит взаимодействие колебаний, соответствующих отдельным гармоническим составляющим.

Увеличение степени полинома приводит к появлению новых гармонических составляющих и комбинационных частот.

Причем, максимальная частота в спектре колебания, прошедшего нелинейное устройство с характеристикой в виде полинома степени  $l$ , равно  $l\omega_0$ . Комбинационные колебания при этом имеют порядки степени  $N$ , не большие показателя степени полинома  $l$ .

При двухсигнальном воздействии  $\omega_{комб} = |n_1\omega_1 + n_2\omega_2|$ , где  $n_1, n_2$  — любые целые, положительные и отрицательные, включая 0. При многосигнальном воздействии  $m$  гармоник



$$\omega_{\text{комб}} = |n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots + n_m\omega_m| \quad (8.8)$$

Возникновение комбинационных составляющих в выходном сигнале, а также зависимость их от амплитуд сигналов на входе обуславливает ряд эффектов.

#### 8.4.2. Эффект интермодуляции

- Интермодуляция – это перенос модуляции с одной несущей на другую.

Пусть на входе линейного двухполюсника с кубической ВАХ

$$i(u) = a_0 + a_1(V - U_0) + a_3(V - U_0)^3 \quad (8.9)$$

действует  $V(t) = U_0 + V_{C_1} + V_{C_2} = U_0 + U_1(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t$ .

Проведя тригонометрические преобразования, получим на частоте  $\omega_2$  амплитуду тока

$$I_{\omega_2} = a_1 U_2 + \frac{3}{4} a_3 U_2^3 + \frac{3}{2} a_3 U_1^2 U_2 \left( 1 + \frac{m^2}{2} + 2m \cos \Omega t + \frac{m^2}{2} \cos 2\Omega t \right). \quad (8.10)$$

Видно, что рассматриваемая составляющая представляет собой АМ колебание, промодулированное частотами  $\Omega$  и  $2\Omega$ , т.е. переносится модуляция с несущей  $\omega_1$  на новую частоту  $\omega_2$ .

#### 8.4.3. Подавление сигнала на нелинейности

Продемонстрируем этот эффект на примере нелинейного элемента с кубической ВАХ вида (8.9).

Пусть на такой нелинейности действуют два немодулированных сигнала с различными частотами

$$V_{\text{ex}}(t) = V_1 + V_2 = U_0 + U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t.$$

Из (8.10) имеем на частоте  $\omega_2$  амплитуду тока при  $m=0$

$$I_{\omega_2} = a_1 U_2 + \frac{3}{4} a_3 U_2^3 + \frac{3}{2} a_3 U_1^2 U_2. \quad (8.11)$$

Отсюда видно, что амплитуда тока  $I_{\omega_2}$  существенно зависит не только от собственной амплитуды  $U_2$ , но и от амплитуды  $U_1$  источника с частотой  $\omega_1$ . Характер этой зависимости определяется знаком коэффициента  $a_3$  при кубическом члене. Если  $a_3 > 0$ , то второй сигнал усиливается за счет энергии первого, если  $a_3 < 0$ , происходит подавление одного сигнала другим.

#### 8.4.4. Совместное воздействие на нелинейный элемент сигналов большой и малой амплитуд

Выясним характер преобразованного колебания при одновременном воздействии суммы большого  $x_0(t)$  и малого  $\Delta x(t)$  колебаний  $x(t) = x_0(t) + \Delta x(t)$  на нелинейный элемент с характеристикой  $y = f(x)$ .



Условимся считать величину воздействия  $\Delta x(t)$  малой, если в отношении такого воздействия характеристика  $y=f(x)$  с заданной степенью приближения может считаться линейной.

С учетом этого:

$$y = f(x) \approx f(x_{\bar{o}}) + f'(x_{\bar{o}})\Delta x + \frac{f''(x_{\bar{o}})}{2}(\Delta x)^2 + \dots \approx y_{\bar{o}} + \Delta y, \quad (8.12)$$

где  $f'(x_{\bar{o}}) = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_{\bar{o}}}$ ,  $y_{\bar{o}} = f(x_{\bar{o}})$ ,  $\Delta y = f'(x_{\bar{o}})\Delta x$ ,  $(\Delta x)^2 \ll \Delta x$ .

Из (8.12) следует, что малым приращениям управляющего колебания  $\Delta x$  соответствуют малые приращения выходного колебания  $\Delta y$ . Это обусловлено тем, что реальная характеристика  $y=f(x)$  является непрерывной функцией.

В соответствии с выражением (8.12) в пренебрежении малой второго порядка  $(\Delta x)^2$  выходной эффект состоит из двух составляющих:

$$\begin{cases} y_{\bar{o}}(t) = f[x_{\bar{o}}(t)], \\ \Delta y(t) = f'(x_{\bar{o}})\Delta x(t). \end{cases} \quad (8.13)$$

Составляющая  $y_{\bar{o}}(t)$  является результатом действия основного (большого) колебания  $x_{\bar{o}}(t)$  и не зависит от его малой части  $\Delta x(t)$ .

Составляющая  $\Delta y(t)$  возникает в результате взаимодействия основного (большого) колебания  $x_{\bar{o}}(t)$  и управляющего (малого) колебания  $\Delta x(t)$ . При сделанном допущении малости  $\Delta x(t)$  величина  $\Delta y(t)$  связана с  $\Delta x(t)$  пропорциональной зависимостью.

Следовательно, в отношении малых приращений входных колебаний, даже в присутствии большой составляющей, нелинейный элемент функционирует как линейный. Коэффициент пропорциональности, связывающий  $\Delta x(t)$  и  $\Delta y(t)$ , зависит от основной составляющей сигнала. Т.к. основное колебание является функцией времени, то коэффициент пропорциональности также является переменной величиной.

Таким образом, нелинейный элемент, находящийся под воздействием большого и малого колебания, ведет себя в отношении малого как линейный с переменным параметром (крутизной, коэффициентом передачи, сопротивлением и др.). К таким элементам в отношении малых колебаний применим принцип наложения.

Итак, мы можем записать (8.12) в виде:

$$i(x + \Delta x) \approx i(x) + \left. \frac{di}{dU} \right|_{U=x} \cdot \Delta x \approx i(x) + S(x) \cdot \Delta x$$

Крутизна  $S(x)$  является изменяемым параметром. Если напряжение  $x$  периодическое, то и крутизна меняется по периодическому закону.

## 8.5. Выводы

Итак, основные свойства нелинейных цепей следующие.

1. Параметры цепей существенно зависят от токов и напряжений.



2. Статические и дифференциальные параметры в общем случае отличаются друг от друга.
3. Выходной эффект нелинейной цепи определяется не только входным сигналом, но и типом нелинейности и начальным смещением.
4. В отклике нелинейных цепей содержатся спектральные составляющие, которых нет в функции воздействия.
5. Нелинейным цепям свойственен эффект интермодуляции, перекрестной модуляции и подавление слабого сигнала сильным.
6. Нелинейный элемент под воздействием большого и малого колебания ведет себя по отношению к малому колебанию как линейный с переменным параметром.

### III. Радиоэлектронные устройства

Ранее в разделе II были рассмотрены теоретические вопросы анализа и (частично) синтеза линейных и нелинейных р/т цепей. Реальные р/т устройства представляют собой, как правило, систему, состоящую из линейных активных и реактивных элементов, соединенных с нелинейными элементами. Рассмотрим основные принципы построения и свойства некоторых, наиболее широко применяемых р/т устройств.

#### 9. Общие сведения об усилителях

##### 9.1. Усилитель как линейный четырехполюсник

Линейным усилителем называют четырехполюсник, обладающий тем свойством, что мощность, выделяемая в нагрузке  $P_2$ , превосходит мощность  $P_1$ , подводимую к его входу, и нет нелинейных искажений.

Усилитель принципиально отличается от многих других цепей, способных увеличить амплитуду воздействующих на них колебаний. К числу таких цепей относится, например, трансформатор (где  $U_2 > U_1$ , но  $P_2 < P_1$ ). Другой пример – настроенный последовательный контур (напряжение на реактивности в  $Q$  раз больше подводимого, но  $P_{вых} < P_{вх}$ ).

На рис. 9.1 изображена блок – схема усилителя.

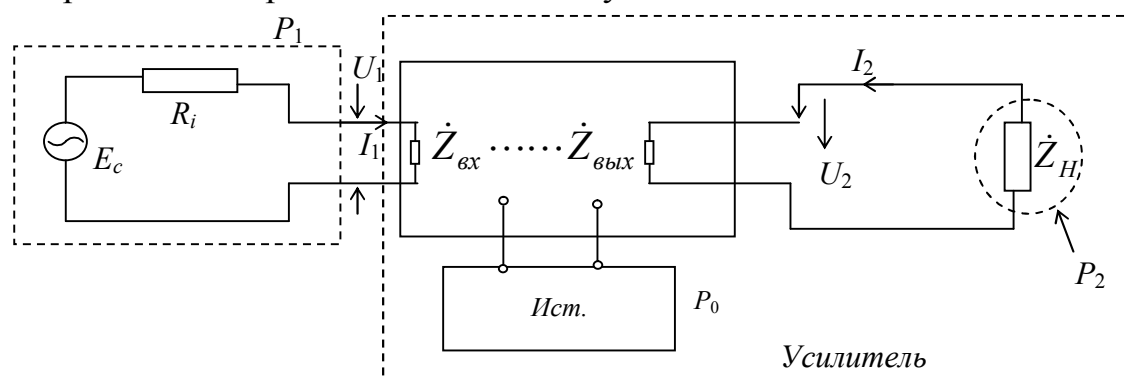


Рис. 9.1



Здесь *Ист* – источник питания. Таким образом, усилитель является активным четырехполюсником. Роль первичного напряжения (сигнала)  $\dot{U}_1$  сводится к управлению поступлением энергии от источника питания к нагрузке  $\dot{Z}_H$ .

$$K_p = \frac{P_2}{P_1} - \text{коэффициент усиления мощности.} \quad (9.1)$$

Если мощность, отдаваемая источником питания, равна  $P_0$ , то коэффициент полезного действия КПД  $\eta = \frac{P_2}{P_0}$ .

Усилитель преобразовывает энергию источника питания в энергию колебания, выделяемого в импедансе нагрузки.

В общем случае усилитель является нелинейным активным четырехполюсником, однако, как было показано в предыдущем разделе, при достаточно малых сигналах, т.е. в режиме малых колебаний, систему можно приближенно считать линейной. Следовательно, параметры ее в режиме малого сигнала не зависят от величины токов и напряжений.

Имея в виду эти соображения, мы вправе для достаточно широкого круга ситуаций при исследовании усилителя считать систему линейной. Полагая, что подводимый сигнал имеет гармоническую форму, при таком рассмотрении, можно применить для количественной оценки явлений в цепи символический метод.

Некоторые определения:

Комплексный коэффициент усиления (КУ) напряжения

$$\dot{K}_u(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}. \quad (9.3)$$

Модуль  $|\dot{K}_u(j\omega)| = K_u = \frac{U_2}{U_1}$  - коэффициент усиления напряжения

Комплексный коэффициент усиления (КУ) тока  $\dot{K}_i(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$ , (9.4)

$|\dot{K}_i(j\omega)| = K_i = \frac{I_2}{I_1}$  - коэффициент усиления тока.

Мощность, подводимая к входу усилителя от генератора сигнала

$$P_1 = I_{1\text{эфф}}^2 R_{\text{ex}}, \quad (9.5)$$

где  $R_{\text{ex}}$  – активная составляющая входного сопротивления усилителя, т.к. эффективное значение тока  $I_{1\text{эфф}} = \frac{I_1}{\sqrt{2}}$ , то  $P_1 = \frac{I_1^2 R_{\text{ex}}}{2}$ .

В предположении активного входного сопротивления ( $\dot{Z}_{\text{ex}} = R_{\text{ex}}$ )

$$P_1 = \frac{U_1 I_1}{2} = \frac{U_1^2}{2R_{\text{ex}}}. \quad (9.6)$$



Полезная мощность, выделяемая на сопротивлении нагрузки  $R_H$ , которое считаем активным, равна:

$$P_2 = \frac{U_2^2}{2R_H} = \frac{1}{2} I_2^2 R_H = \frac{I_2 U_2}{2} \quad (9.7)$$

Отсюда КУ по мощности

$$K_P = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} = K_U K_I.$$

Отметим, что  $K_P$  не всегда превышает единицу, т.к. при холостом ходе ( $R_H \rightarrow \infty$ ,  $I_2=0$ ,  $K_I=0$ ) и при коротком замыкании ( $R_H=0$ ,  $U_2=0$ ,  $K_U=0$ ) коэффициент усиления по мощности равен нулю. Отсюда следует, что имеется некоторое оптимальное сопротивление нагрузки  $R_{H\text{ опт}}$ , при котором  $K_P$  достигает максимального значения.

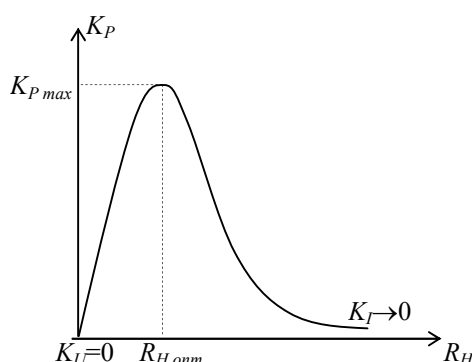


Рис. 9.2

Если  $R_H = R_{H\text{ опт}}$ , то усилитель согласован по выходу, т.е.  $R_{\text{вых}} = R_{H\text{ опт}}$ .

Если  $R_{\text{ex}} = R_i$  - усилитель согласован по входу, т.е. входное сопротивление равно сопротивлению источника  $R_i$ , тогда т.к. (см. рис. 9.1)  $R_i = R_{\text{ex}}$ , то

$$E_c = 2U_1; \quad I_1 = \frac{E_c}{2R_i}; \quad P_1 = \frac{U_1 I_1}{2} = \frac{E_c^2}{8R_i}.$$

Если главным является усиление мощности, то усилитель должен быть согласован и по входу, и по выходу.

Если главным является получение максимального напряжения, т.е.  $\max K_U$  - это усилитель напряжения, и энергетика не принимается во внимание, но всегда  $K_P > 1$ .

## 9.2. АЧХ и ФЧХ усилителя

Форма сложного сигнала на выходе линейного четырехполюсника отличается от формы сигнала на его входе, если:

- гармонические составляющие входного сигнала усиливаются (ослабляются) четырехполюсником неодинаково. Изменение формы по этой причине - частотные искажения;
- вносимые четырехполюсником фазовые сдвиги изменяют входное расположение гармонических составляющих в выходном сигнале - фазовые искажения.



Так как частотные и фазовые искажения могут возникать в линейных цепях – это линейные искажения.

АЧХ четырехполюсника (см раздел II):

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}(\omega)}{\dot{U}_{\text{вх}}(\omega)} = \frac{|\dot{U}_{\text{вых}}(\omega)|e^{j\varphi_\omega}}{|\dot{U}_{\text{вх}}(\omega)|},$$

$$\dot{K}(j\omega) = |\dot{K}(j\omega)|e^{j\varphi_\omega} = |\dot{K}(\omega)|(\cos \varphi_\omega + j \sin \varphi_\omega).$$

Комплексный коэффициент усиления на любой частоте является вектором, характеризуемым модулем  $|\dot{K}(\omega)| = \frac{U_{\text{вых}}(\omega)}{U_{\text{вх}}(\omega)}$  и фазовым углом  $\varphi_\omega$ , представляющим собой угол сдвига фазы между выходным и входным напряжением усилителя.

Если отложить вектор комплексного коэффициента усиления  $\dot{K}(\omega)$  в плоскости комплексных чисел или полярной системе координат, то при изменении частоты системы  $\omega$  от 0 до  $\infty$  конец вектора опишет кривую, называемую частотно – фазовой характеристикой усилителя или его годографом КУ.

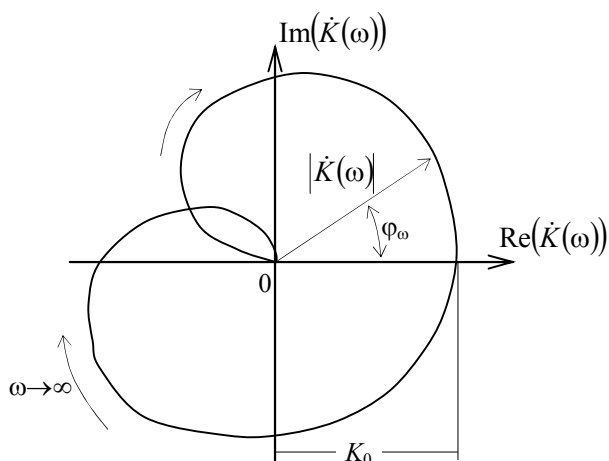


Рис. 9.3

Эта характеристика содержит полную информацию о частотных и фазовых соотношениях в усилителе, а также удобна для оценки его устойчивости.

Для анализа частотных свойств усилителя чаще всего используют его АЧХ.

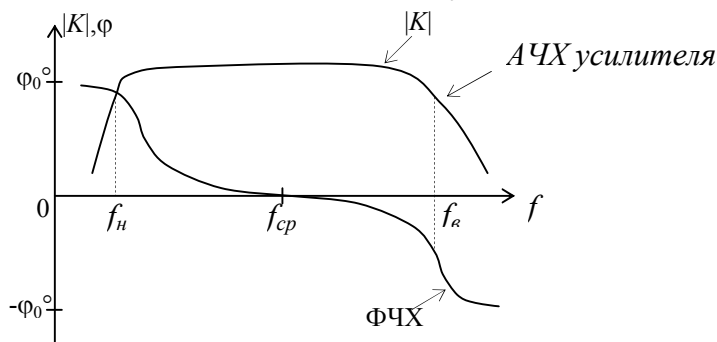


Рис. 9.4

Тогда коэффициент частотных искажений  $m = \frac{K}{K_0}$ , где  $K_0$  – усиление на средней частоте,  $K$  – усиление на рассматриваемой частоте.



Оценку фазовых искажений производят по его фазо-частотной характеристике (ФЧХ), представляющей зависимость угла сдвига фаз между выходным и входным напряжением от частоты (рис. 9.4).

Суждению, насколько ФЧХ отличается от идеальной и в каком диапазоне частот это отличие несущественно, в сильной степени препятствует изображение (рис.9.4) фазовой характеристики в логарифмическом масштабе. В этом случае идеальной характеристике соответствует уже не прямая линия, а логарифмическая кривая. Эта трудность с масштабом полностью снимается, если вместо  $\varphi(\omega)$  откладывать время задержки  $t_3(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\omega}$ . В той области, где  $t_3(\omega) = const$ , данное устройство можно использовать для усиления сигналов со спектром, лежащим в пределах от  $\omega_n$  до  $\omega_g$ , без фазовых искажений.

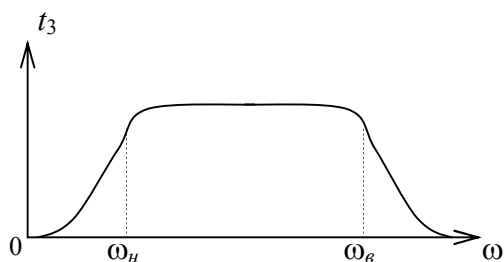


Рис. 9.5

Наличие в усилителе постоянного сдвига в  $\pi$  не влияет на фазу сигнала, изменяя только его полярность при нечетном числе каскадов на противоположную.

Наличие в системе устройства, дающего не зависящий от частоты, но не кратный целому числу  $\pi$  фазовый сдвиг, приведет уже к нарушению формы сигнала. В этом можно наглядно убедиться на простейшем примере, когда сигнал содержит две компоненты, а не зависящий от частоты фазовый сдвиг равен  $\pi/2$  (см. рис. 9.6).

$$U_{ex}(t) = \sin \omega t + \sin 2\omega t \quad (\text{сдвиг равен нулю}) \quad (\text{рис. 9.6a})$$

Если сдвиг на  $\pi/2$ , то

$$U_{ввх}(t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t + \cos 2\omega t \quad (\text{рис.9.6б})$$

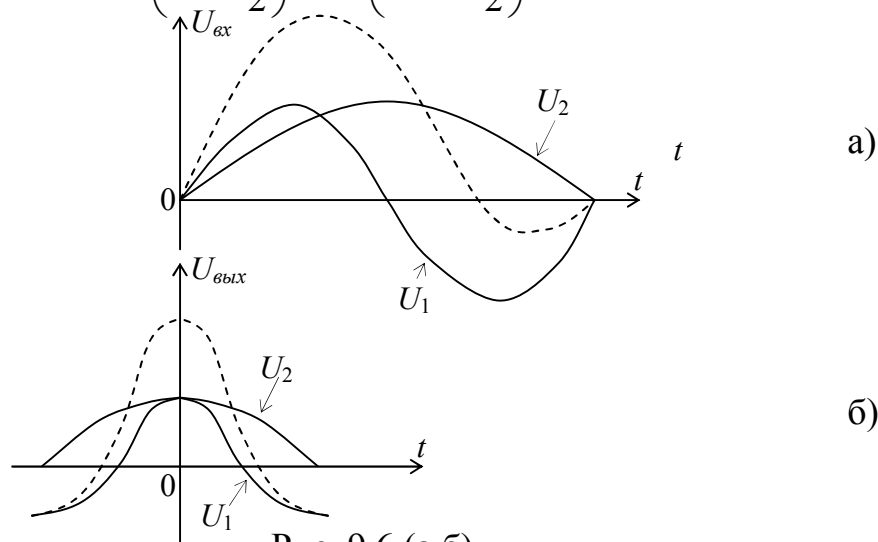


Рис. 9.6 (а,б)



Форма этих колебаний существенно отличается.

Как было показано ранее в разделе II, идеальной фазовой характеристикой линейного четырехполосника, которая не вносит фазовых искажений, является прямая, проходящая под любым углом через начало координат.

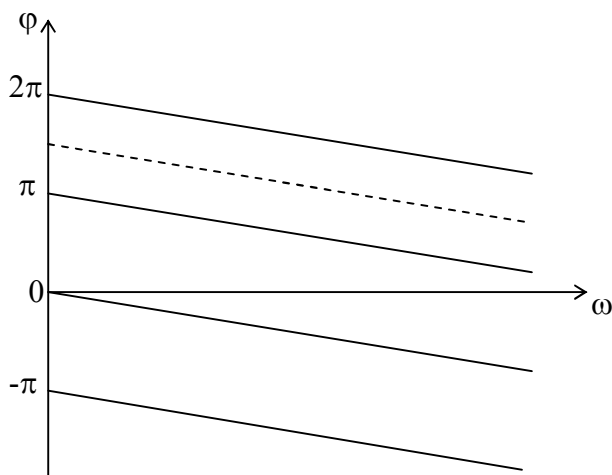


Рис. 9.7

Фазовые характеристики, представляющие прямые линии, идущие не только из начала координат, но и из любых точек на оси ординат, смещенных на величины, кратные целому числу  $\pi$ , также характеризуют идеальное устройство.

Пунктирные прямые не соответствуют идеальному устройству, т.к. не зависящий от частоты фазовый сдвиг для них  $\pi < \varphi < 2\pi$ .

### 9.3. Переходные характеристики и переходные искажения

В усилителях импульсных сигналов линейные искажения усиливаемых импульсов удобнее рассматривать по переходным характеристикам.

Переходная характеристика – это зависимость мгновенного значения выходного напряжения (тока) сигнала от времени при входном сигнале вида  $\delta(t)$ , т.е. функции Хэвисайда (функции включения).

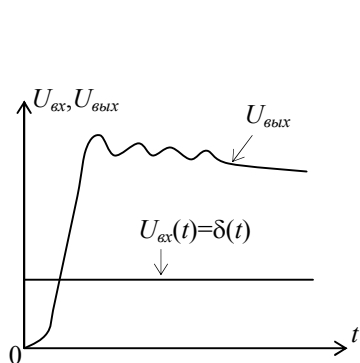


Рис. 9.8-а

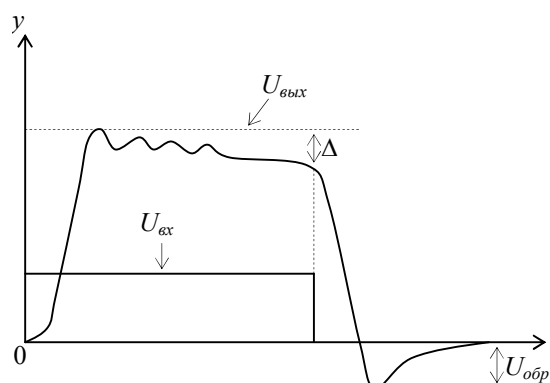


Рис. 9.8-б

Переходные искажения разделяют на искажения фронтов и искажения вершин усиливаемых импульсов.

Ввиду того, что у большинства усилителей процесс установления фронта происходит за время, много меньше длительности усиливаемых импульсов, для оценки искажений фронтов пользуются переходной характеристикой за малый



интервал времени (переходная характеристика в области малых времен или высоких частот).

Под "малым" значением времени понимается промежуток времени, в течение которого образуется фронт (и выброс) в переходной характеристике. Для оценки этих искажений нет необходимости искать переходный процесс в схеме с учетом всех элементов. Достаточно сохранить в ней только те, которые существенно влияют на коэффициент передачи в области высоких частот. Это следует из того положения, что, интересуясь переходным процессом при  $t \approx 0$ , необходимо учитывать, что во всех цепях усилителя токи через индуктивности отсутствуют, а напряжения на емкостях равны нулю.

Переходная характеристика за большой интервал времени – переходная характеристика в области больших времен (или низких частот).

Для оценки спада переходной характеристики, происходящего при относительно "больших" значениях времени, достаточно проанализировать поведение усилительной схемы, сохранив в ней только элементы, определяющие коэффициент передачи в области низших частот. Последнее вытекает из того, что, интересуясь процессами при больших значениях  $t$ , мы должны выбросить из рассмотрения "высокочастотные" элементы схемы, т.к. "быстрые" составляющие переходного процесса, определяемые ими, к этому времени практически затухнут.

В итоге импульс имеет вид, изображенный на рис. 9.8-б.

#### 9.4. Устойчивость линейного усилителя

На практике схемы четырехполюсников состоят из простых (элементарных) четырехполюсников. Для определения условий устойчивости линейных цепей необходимо учесть реальность неполной однонаправленности активных четырехполюсников, т.е. приходится считаться с воздействием выходного колебания на вход четырехполюсника (например, влияние  $Y_{12}$  в транзисторе). Причем такая обратная связь, с одной стороны, в ряде случаев позволяет существенно улучшить рабочие характеристики цепей. Но, с другой стороны, при определенных условиях каскады становятся неустойчивыми и в них возникают автоколебания.

##### 9.4.1. Передаточная функция линейной системы с обратной связью (ОС)

Для того, чтобы последующий анализ можно было применить к большему числу различных частных случаев, рассмотрим проблему цепи с обратной связью (ОС) в общей постановке.

Линейная система с ОС состоит из двух звеньев. Активное звено с передаточной функцией  $\dot{K}(p)$  – основной четырехполюсник, пассивное звено с передаточной функцией  $\dot{\beta}(p)$  – элемент ОС.



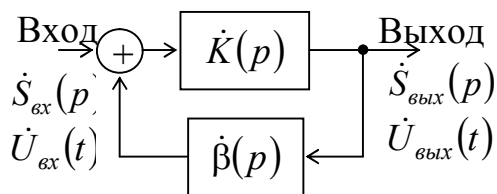


Рис. 9.9

На входе основного элемента имеется устройство, суммирующее входной сигнал и выходную реакцию элемента обратной связи.

Если  $\dot{S}_{ex}(p)$  и  $\dot{S}_{вых}(p)$  – изображения входного и выходного сигналов соответственно, то

$$\dot{S}_{вых}(p) = \dot{K}(p) [\dot{S}_{ex}(p) + \dot{\beta}(p) \dot{S}_{вых}(p)]. \quad (9.8)$$

Отсюда передаточная функция системы с ОС

$$\dot{K}_{OC}(p) = \frac{\dot{S}_{вых}(p)}{\dot{S}_{ex}(p)} = \frac{\dot{K}(p)}{1 - \dot{\beta}(p)\dot{K}(p)}. \quad (9.9)$$

Рассмотрим это выражение при  $p=j\omega$ :

$$\dot{K}_{OC}(j\omega) = \frac{\dot{K}(j\omega)}{1 - \dot{\beta}(j\omega)\dot{K}(j\omega)}.$$

Если на заданной частоте  $\omega$  выполняется условие

$$|1 - \dot{\beta}(j\omega)\dot{K}(j\omega)| > 1, \text{ или для вещественных } \beta \text{ и } K: \beta K < 0, \quad (9.10)$$

то введение ОС уменьшит модуль коэффициента передачи системы и, следовательно, амплитуду выходного сигнала. Это система с отрицательной обратной связью (ООС).

Если выполняется условие

$$|1 - \dot{\beta}(j\omega)\dot{K}(j\omega)| < 1, \text{ или для вещественных } \beta \text{ и } K: \beta K > 0, \quad (9.11)$$

то в системе реализуется положительная обратная связь (ПОС).

Как ООС так и ПОС широко используются при создании радиотехнических устройств. Однако, следует иметь в виду, что ПОС может являться причиной неустойчивости системы.

Действительно, пусть  $\dot{\beta} = \beta_0$ ,  $\dot{K} = K_0$  – положительные и вещественные. Если  $\beta_0 = 0$  (вначале), а затем увеличивается, то в соответствии с (9.9)  $|K_{OC}|$  возрастает, если же  $\beta_0$  становится равной  $1/K_0$ , то  $|K_{OC}| \rightarrow \infty$ , что означает самовозбуждение системы, т.е. появление выходного сигнала в отсутствии сигнала на входе. Итак, для устойчивости необходимо, чтобы функция  $1 - \dot{K}(p)\dot{\beta}(p)$  не имела нулей в правой полуплоскости.

#### 9.4.2. Устойчивость цепей с ОС. Критерий Найквиста.

В реальной цепи, охваченной ОС, всегда есть реактивные элементы, накапливающие энергию. Реактивные элементы создают дополнительные фазовые сдвиги. Если же на какой-либо частоте эти сдвиги дают в сумме



дополнительный угол в  $180^\circ$ , то ООС превращается в ПОС и создаются условия для паразитной генерации.

Для исследования характера равновесия активного четырехполюсника, охваченного ОС, можно воспользоваться простым и наглядным методом, предложенным Найквистом.

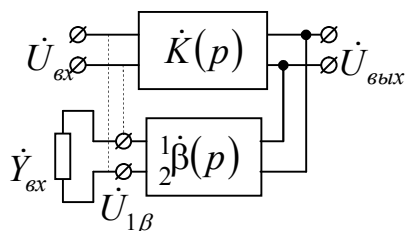


Рис. 9.10

Разомкнем систему в точках  $1\beta - 2\beta$  и подключим к этим точкам нагрузку, проводимость которой равна входной проводимости основного четырехполюсника  $\dot{Y}_{вх}$ .

Коэффициент передачи полученного таким образом четырехполюсника (разомкнутая система) равен произведению коэффициентов передач:

$$\dot{K}_{\Sigma}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{1\beta}}{\dot{U}_{вх}} = \dot{K}(j\omega) \cdot \dot{\beta}(j\omega), \quad (9.12)$$

$$\text{где } \dot{K}(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\varphi_K(\omega)},$$

$$\dot{\beta}(j\omega) = \beta(\omega) \cdot e^{j\varphi_{\beta}(\omega)},$$

$\varphi_K$   $\varphi_{\beta}$  – фазовые углы четырехполюсников. Отсюда:

$$\dot{K}_{\Sigma}(j\omega) = K(\omega) \cdot \beta(\omega) e^{j(\varphi_K + \varphi_{\beta})}. \quad (9.13)$$

$$\text{В результате} \quad \begin{cases} |\dot{K}_{\Sigma}| = |\dot{K}(\omega)| \cdot |\dot{\beta}(\omega)|, \\ \varphi_{\Sigma} = \varphi_K + \varphi_{\beta}. \end{cases} \quad (9.14)$$

Построим амплитудно-фазовую характеристику (АФХ) для коэффициента передачи  $\dot{K}_{\Sigma}(j\omega)$  разомкнутой системы. Во всех случаях, представляющих практический интерес, модули  $|\dot{K}(j\omega)|$  и  $|\dot{\beta}(j\omega)|$  стремятся к нулю с ростом частоты. Кроме того, АФХ симметрична относительно вещественной оси на плоскости  $\dot{K}_{\Sigma}(j\omega)$ , т.к.  $\dot{K}_{\Sigma}(-j\omega) = \dot{K}_{\Sigma}^*(j\omega)$ . Таким образом, АФХ для рассматриваемых систем представляет собой замкнутые кривые в плоскости  $\dot{K}_{\Sigma}$ . Эти кривые называются годографом  $\dot{K}_{\Sigma}$ .



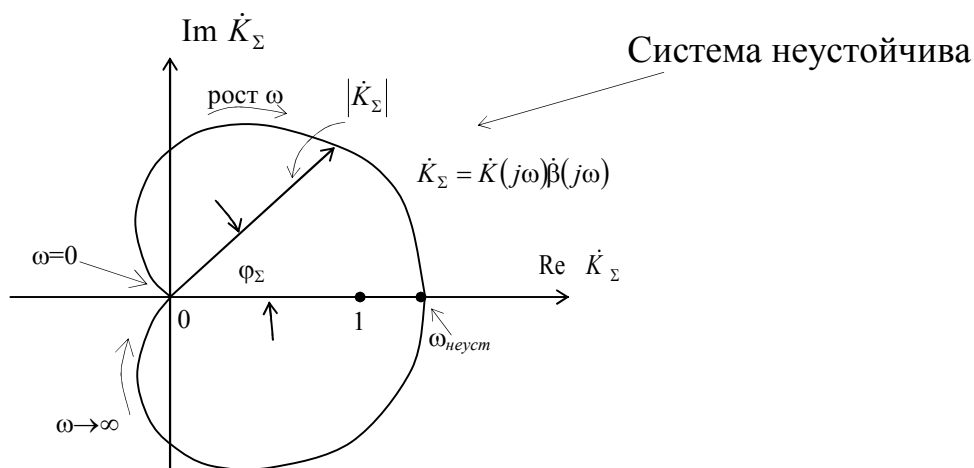


Рис. 9.11

В теории функции комплексного переменного показано, что отображение  $\dot{K}_\Sigma$  вида  $\dot{K}_\Sigma(p) = \dot{K}(p) \cdot \dot{\beta}(p)$  есть отображение плоскости  $p$  в комплексную плоскость  $\dot{K}_\Sigma$ . Образом правой полуплоскости  $p$  оказывается внутренняя область, охватывающая АФХ. Корню характеристического уравнения  $1 - \beta(p) \cdot \dot{K}(p) = 0$  на плоскости  $\dot{K}_\Sigma$  соответствует единственная точка  $\dot{K}_\Sigma = 1$ .

Итак, если годограф (АФХ) передаточной функции разомкнутого тракта не охватывает точку  $(1, j0)$ , то при замкнутой цепи ОС системы устойчива, в противном случае система неустойчива – критерий Найквиста.

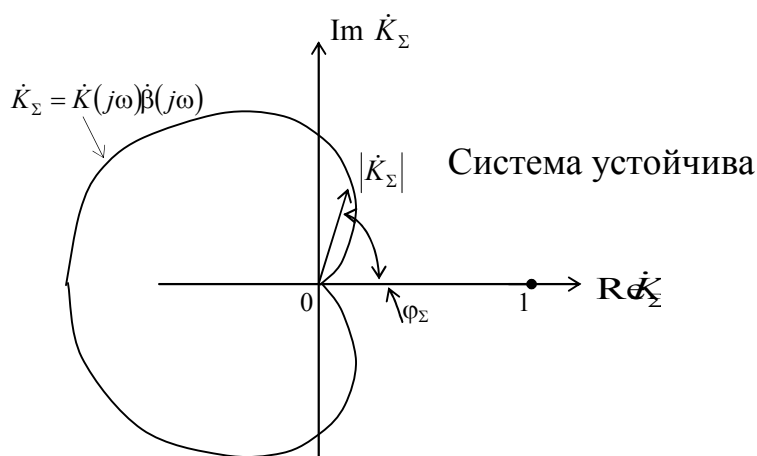


Рис. 9.12

Из (9.14) следует критерий неустойчивости

$$\begin{cases} |\dot{K}(\omega)| \cdot |\dot{\beta}(\omega)| > 1, \\ \varphi_\Sigma = \varphi_K + \varphi_\beta = 2\pi n. \end{cases} \quad (9.15)$$

Помимо критерия Найквиста известен ряд других критериев, которые рассматриваются в других учебных курсах. В радиотехнике наиболее широко используется этот критерий.

Примеры АЧХ и ФЧХ каскада с ОС показаны на рис. 9.13 и 9.14



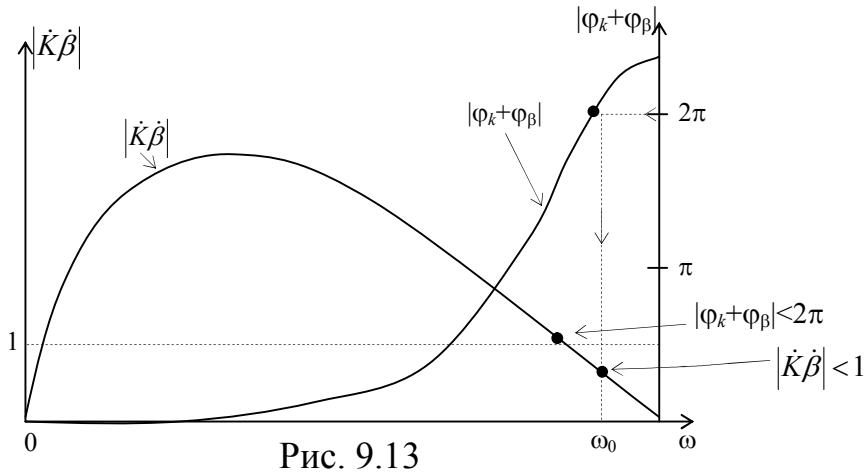


Рис. 9.13

На рис. 9.13 нет неустойчивого режима, т.к. при сдвиге по фазе  $2\pi$ ,  $|\dot{K}\beta| < 1$ , если же  $|\dot{K}\beta| > 1$ , то фазы  $|\varphi_{\kappa} + \varphi_{\beta}| < 2\pi$ .

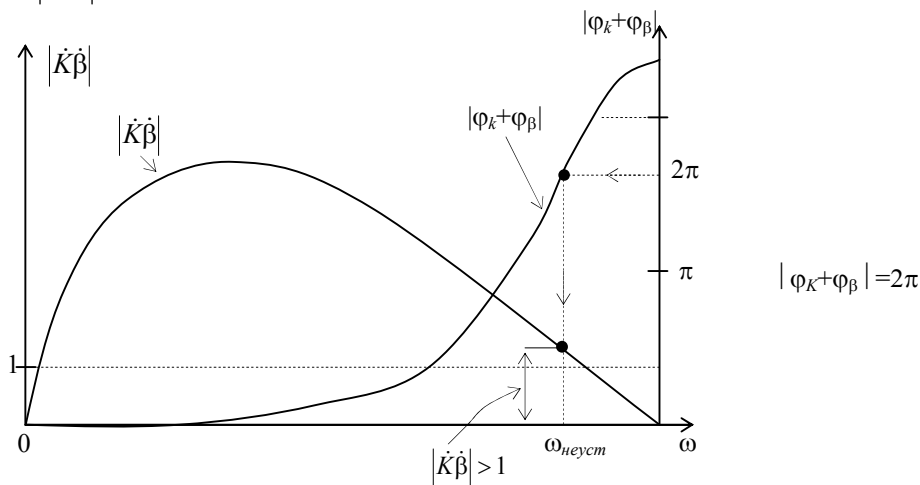


Рис. 9.14

На рис. 9.14 есть неустойчивость на частоте  $\omega_{\text{неуст}}$ , т.к. здесь при  $|\varphi_{\kappa} + \varphi_{\beta}| = 2\pi$ ,  $|\dot{K}\beta| > 1$ .

### 9.4.3. Способы включения ОС

Обратная связь в усилителе может иметь место по следующим причинам:

- особенности конструкции усилителя – внутренняя ОС;
- из-за введения специальных цепей – внешняя ОС;
- из-за паразитных связей – паразитная ОС.

Цепь ОС может быть подключена ко входу и выходу усилителя различными способами.

Если вход цепи ОС присоединен к выходу усилителя параллельно нагрузке, то напряжение на выходе цепи ОС будет пропорциональным напряжению на нагрузке. Это ОС по напряжению.



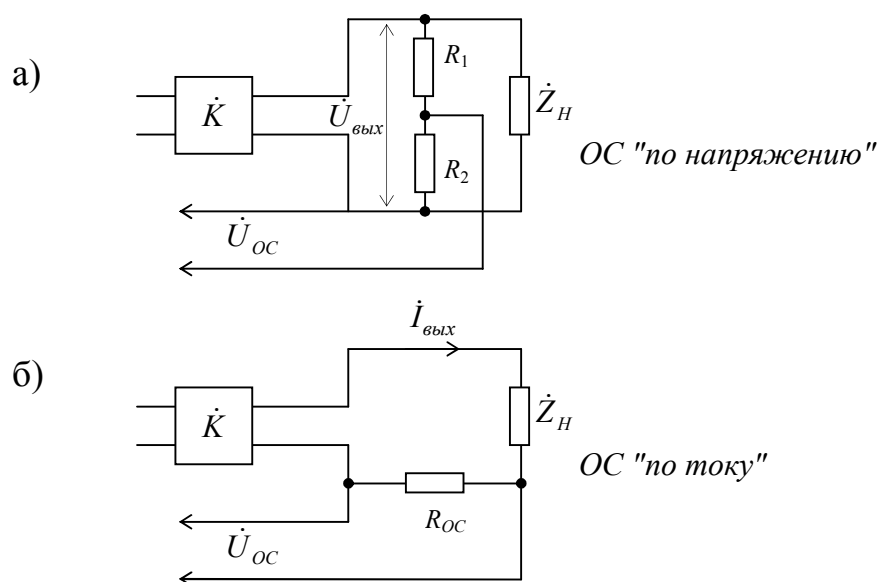


Рис. 9.15

Если вход цепи ОС подключен к выходу усилителя последовательно с нагрузкой, то напряжение ОС будет пропорциональным току в нагрузке – ОС по току. Возможна комбинированная ОС: и по току, и по напряжению.

Если выход цепи ОС подключен ко входу усилителя последовательно с источником сигнала – это последовательная ОС (рис.9.15-а), если параллельно – то это параллельная ОС (рис. 9.15-б).

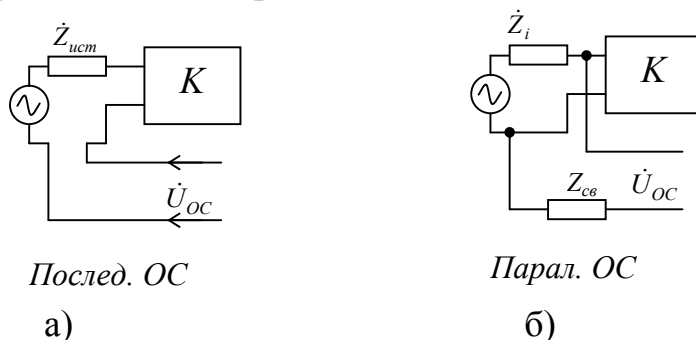


Рис. 9.16

- Влияние ООС на стабильность усиления

Коэффициент усиления (КУ) усилителя изменяется в результате ряда дестабилизирующих факторов: изменение питающих напряжений, температуры, старение деталей и т.д. Нестабильность КУ оценивается относительным изменением усиления:  $\alpha = \frac{dK}{K}$  – без ОС.

изменением усиления:  $\alpha = \frac{dK}{K}$  – без ОС.

Найдем нестабильность КУ с ООС  $\alpha_{\text{оос}} = \frac{dK_{\text{оос}}}{K_{\text{оос}}}$ .



$$\alpha_{оос} = \frac{d\left(\frac{K}{1+\beta K}\right)}{\frac{K}{1+\beta K}} = \frac{dK}{K} \cdot \frac{1}{1+\beta K} = \frac{\alpha}{1+\beta K}.$$

Следовательно, ООС уменьшает нестабильность КУ устройства во столько же раз, во сколько оно снижает его КУ.

- Влияние ООС на частотную характеристику  $\dot{K}_{оос}(j\omega) = \frac{\dot{K}(j\omega)}{1+\beta\dot{K}}$ .

Если цепь ОС частотно не зависима (активное сопротивление), то происходит общее уменьшение КУ на всех частотах (рис.9.17)

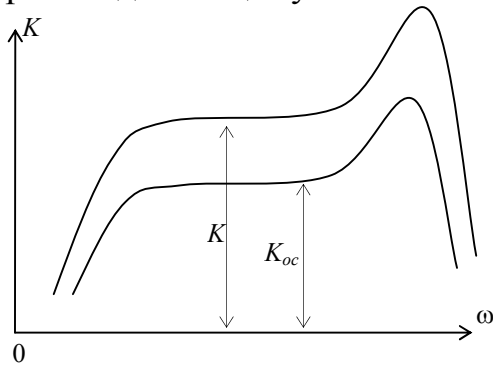


Рис. 9.17

Если цепь частотно зависима, то эта зависимость проявляется в АЧХ всего усилителя (см. рис. 9.18).

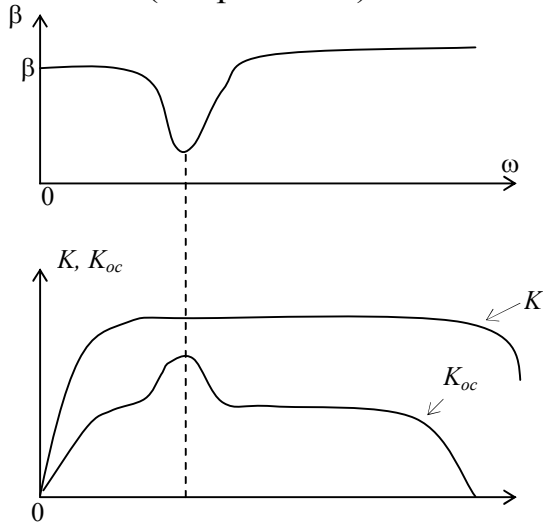


Рис. 9.18



## 10. Усилительные устройства

### 10.1. Транзисторный видеоусилитель

#### 10.1.1. Типы транзисторов

Учитывая, что курса полупроводниковой электроники на втором курсе еще не было, необходимо дать очень короткую информацию о транзисторах.

#### • Биполярный транзистор

Биполярный транзистор представляет собой электропреобразовательный прибор, который состоит из двух последовательных навстречу включенных  $p$ - $n$  переходов (рис. 10.1). Так же как и диоды, транзисторы выполняются из германия или кремния и бывают  $p$ - $n$ - $p$  и  $n$ - $p$ - $n$  типа в зависимости от характера проводимости:  $p$  - дырочная проводимость,  $n$  - электронная проводимость (рис.10.2а).

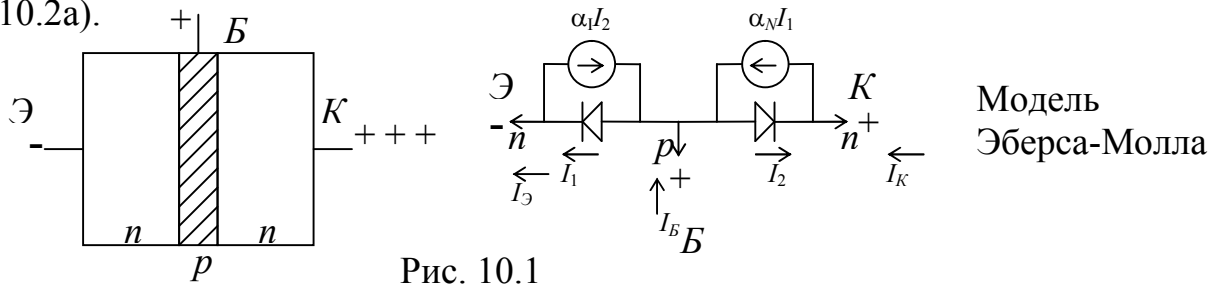


Рис. 10.1

Источниками носителей являются эмиттеры. Например, для  $n$ - $p$ - $n$  транзистора через открытый переход, который образуется в контакте эмиттера с базой и называется эмиттерным, электроны инжектируются в базу. На базу относительно эмиттера подается положительное напряжение (порядка десятых долей вольта). База обладает малой толщиной, поэтому время жизни электронов, поступающих в базу, относительно велико. Диффундируя через базу, они достигают коллекторного перехода. Этот ток обеспечивается генератором  $\alpha_N I_1$  ( $\alpha_N < 1$  - коэффициент передачи эмиттерного тока). Количество электронов, рекомбинирующих в базе, не превышает нескольких единиц процентов от их общего количества.

На коллектор относительно базы подается сравнительно большое положительное напряжение (единицы - десятки вольт), которое запирает коллекторный переход. Поле запертого коллекторного перехода предотвращает переходы электронов из коллектора в базу, а дырок - в обратном направлении, но способствует электронам, инжектированным из эмиттера, перейти в коллектор. Если триод в инверсном включении, то прямому коллекторному току  $I_2$  соответствует эмиттерный ток  $\alpha_I I_2$  ( $\alpha_I$  - коэффициент передачи коллекторного тока).

Токи во внешних цепях транзистора зависят от напряжений, приложенных к его электродам. При увеличении положительного напряжения  $U_{\text{бэ}}$ , снижается потенциальный барьер в эмиттерном переходе, а поток электронов из эмиттера в



базу и коллектор возрастает, все токи увеличиваются. При увеличении положительного напряжения  $U_{кб}$ , увеличивается толщина коллекторного перехода. Вследствие этого уменьшается толщина базы и число рекомбинирующих в ней электронов. В результате базовый ток уменьшается, а коллекторный увеличивается (рис. 10.2б).

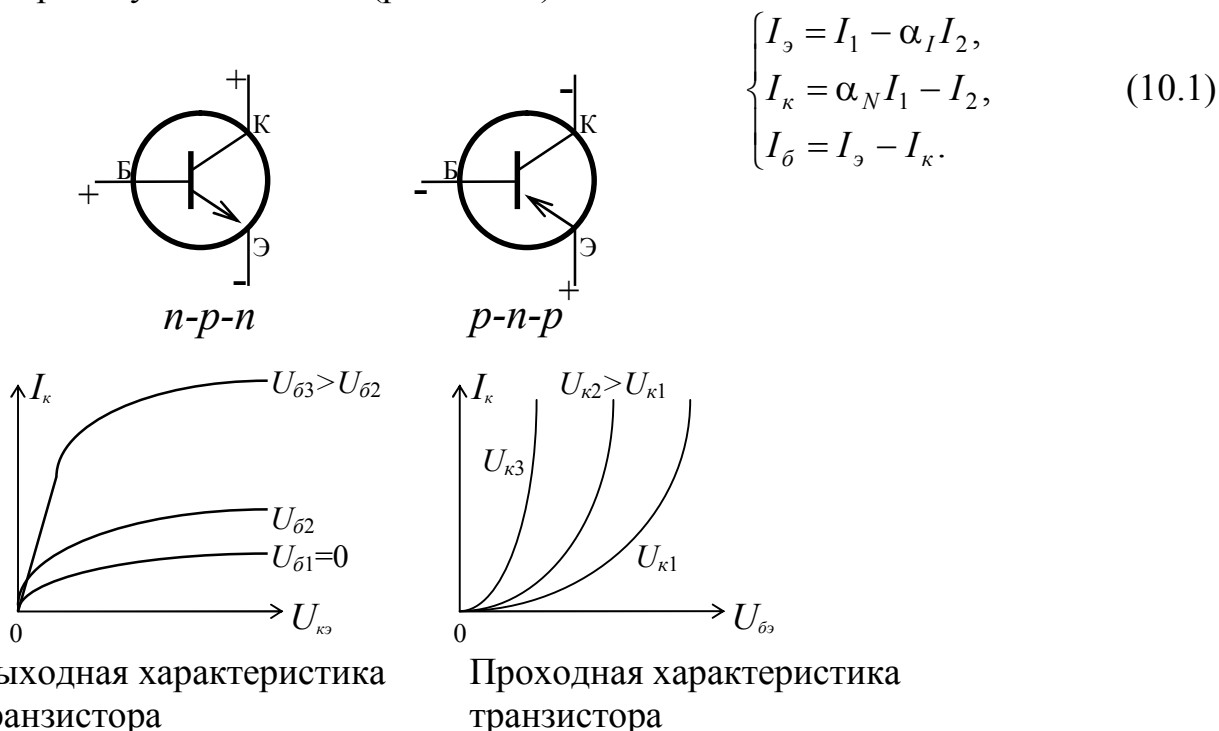


Рис. 10.2

### • Полевой транзистор (униполярный)

Это транзисторы, работа которых основана на использовании только основных носителей (электронов или дырок). Вторым термином - «полевые транзисторы» характеризует механизм управления током: с помощью электрического поля (а не тока, как в биполярных транзисторах).

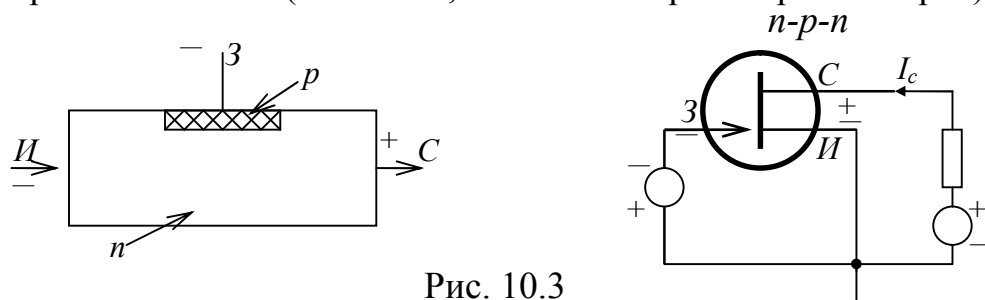


Рис. 10.3

В полевом *n-p-n* транзисторе *n*-сток имеет положительную полярность относительно истока. При изменении потенциала затвора меняется ширина *p-n* перехода, а значит и рабочее сечение пластины. В результате меняется ее сопротивление и, соответственно, ток в рабочей цепи (рис. 10.4). Таким образом, этот тип прибора является управляемым активным сопротивлением.



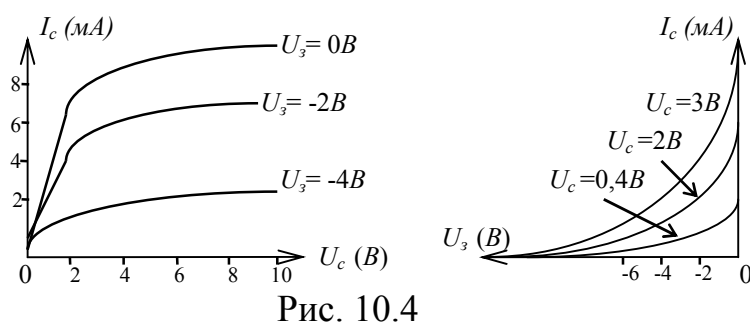


Рис. 10.4

### 10.1.2. Характеристики и дифференциальные параметры транзисторного усилителя

Итак, в транзисторном усилителе управляемым элементом является транзистор. Возможны три схемы включения транзисторов – общий эмиттер (ОЭ), общая база (ОБ) и общий коллектор (ОК).

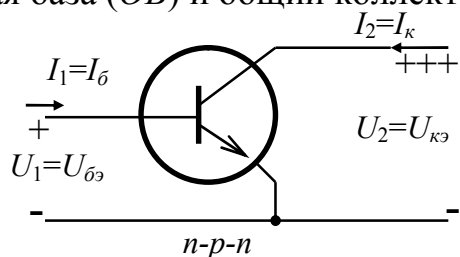


Рис. 10.5

При определении характеристик усилителя с использованием параметров проводимости надо связать токи базы  $i_б$  и коллектора  $i_к$  с напряжениями. С этой целью удобно пользоваться  $Y$  параметрами.

Задача ставится следующим образом. Две из четырех величин, определяющих режим четырехполюсника, известны. Их можно рассматривать как заданные воздействия на цепь. Требуется найти отклики на эти воздействия, т.е. две остальные величины.

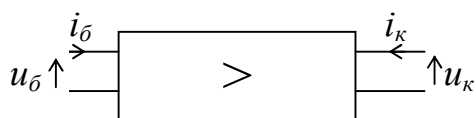


Рис. 10.6

Пусть заданы  $u_б$  и  $u_к$ , найти отклики  $i_б$  и  $i_к$ ,  
 $i_б = f_1(u_б, u_к)$ ;  $i_к = f_2(u_б, u_к)$ .

Положим, что напряжения меняются на бесконечно малые величины, тогда

$$\begin{cases} di_б = \frac{\partial i_б}{\partial u_б} du_б + \frac{\partial i_б}{\partial u_к} du_к \\ di_к = \frac{\partial i_к}{\partial u_б} du_б + \frac{\partial i_к}{\partial u_к} du_к \end{cases} \quad (10.2)$$

В линейных четырехполюсниках эти уравнения справедливы и для конечных приращений



$$\begin{aligned}\Delta i_{\bar{o}} &= y_{11}\Delta u_{\bar{o}} + y_{12}\Delta u_{\kappa}, \\ \Delta i_{\kappa} &= y_{21}\Delta u_{\bar{o}} + y_{22}\Delta u_{\kappa}.\end{aligned}\quad (10.3)$$

При не слишком высоких частотах можно перейти от  $y$  к  $g$  - параметрам (т.е. считать проводимости без реактивностей).

$$\begin{aligned}y_{11} = g_{11} &= \left. \frac{\Delta i_{\bar{o}}}{\Delta u_{\bar{o}}} \right|_{\Delta u_{\kappa}=0}, & y_{12} = g_{12} &= \left. \frac{\Delta i_{\bar{o}}}{\Delta u_{\kappa}} \right|_{\Delta u_{\bar{o}}=0}, \\ y_{21} = g_{21} &= \left. \frac{\Delta i_{\kappa}}{\Delta u_{\bar{o}}} \right|_{\Delta u_{\kappa}=0}, & y_{22} = g_{22} &= \left. \frac{\Delta i_{\kappa}}{\Delta u_{\kappa}} \right|_{\Delta u_{\bar{o}}=0}\end{aligned}\quad (10.4)$$

Дифференциальные (малосигнальные) параметры могут быть найдены из четырех семейств характеристик.

1. Входные характеристики  $i_{\bar{o}}=f(U_{\bar{o}})$ ,  $U_{\kappa}=\text{const}$ .

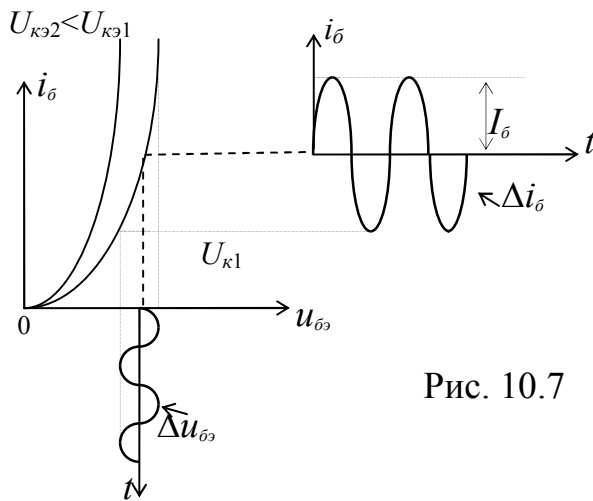


Рис. 10.7

Из этих характеристик находим параметр

$$g_{11} = \left. \frac{\Delta i_{\bar{o}}}{\Delta U_{\bar{o}a}} \right|_{U_{\kappa}=\text{const}}.$$

Изменяя ток базы  $i_{\bar{o}}=i_{\bar{a}}-i_{\kappa}$ , мы управляем притоком электронов (дырок) к коллекторному переходу, меняя тем самым величину коллекторного тока. Если приращения являются гармоническими функциями времени, то переходим к амплитудам

$$g_{11} \approx \left. \frac{I_{\bar{o}}}{U_{\bar{o}}} \right|_{U_{\kappa}=\text{const}}. \quad (10.5)$$

2. Прямые проходные характеристики  $i_{\kappa}=f(U_{\bar{o}})$ , при  $U_{\kappa}=\text{const}$

$$g_{21} = \left. \frac{\Delta i_{\kappa}}{\Delta u_{\bar{o}}} \right|_{U_{\kappa}=\text{const}} \approx \left. \frac{I_{\kappa}}{U_{\bar{o}}} \right|_{U_{\kappa}=\text{const}} \quad (10.6)$$

$g_{21} = S$  - это крутизна характеристики в рабочей точке



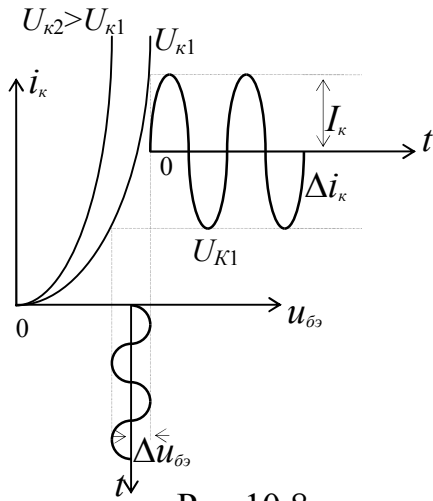


Рис.10.8

3. Выходные характеристики  $i_k = f(U_k)$ , при  $U_{\delta} = const$

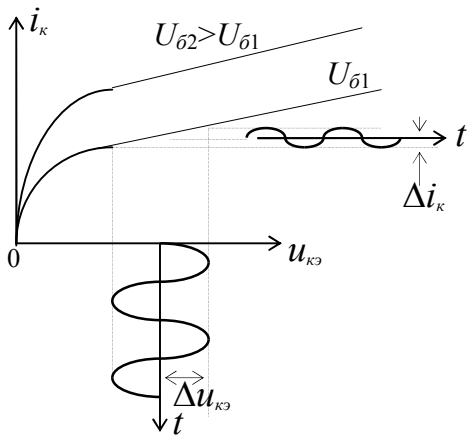


Рис.10.9

$$g_{22} = \left. \frac{\Delta i_k}{\Delta u_k} \right|_{U_{\delta} = const} \approx \left. \frac{I_k}{U_k} \right|_{U_{\delta} = const} \quad (10.7)$$

Коллекторный диод, входящий в состав транзистора, питается напряжением непротекшего обратного направления. Поэтому неудивительно, что на величину  $I_k$  напряжение  $U_k$  влияет мало, т.е. выходная проводимость  $g_{22}$  транзистора мала.

4. Обратные проходные характеристики  $i_{\delta} = f(U_k)$ , при  $U_{\delta} = const$  определяют обратное воздействие выходного коллекторного напряжения на входной (базовый) ток

$$g_{12} = \left. \frac{\Delta i_{\delta}}{\Delta u_k} \right|_{U_{\delta} = const} \approx \left. \frac{I_{\delta}}{U_k} \right|_{U_{\delta} = const} \quad (10.8)$$

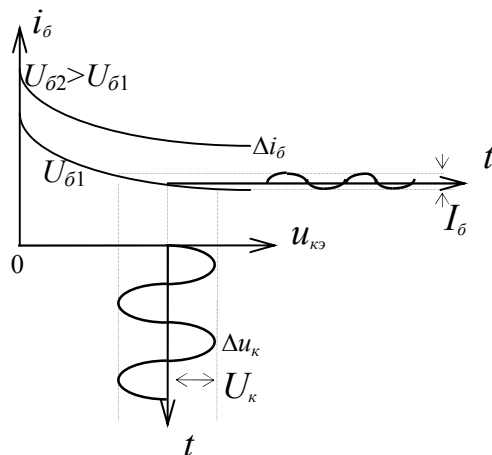


Рис.10.10



Напряжение коллектора слабо сказывается на величине токов транзистора, поэтому проводимость  $g_{12}$  - мала.

При грубой оценке усилительных свойств транзисторного усилителя можно считать  $|g_{12}| \ll |g_{22}| \ll |g_{11}|$ ;  $|g_{12}| \ll |g_{21}|$ ,  $|g_{12}| \ll |g_{11}|$ .

### 10.2. Аperiodический усилитель (резистивный каскад)

На рис. 10.11 приведена схема каскада аperiodического усилителя с общим эмиттером.

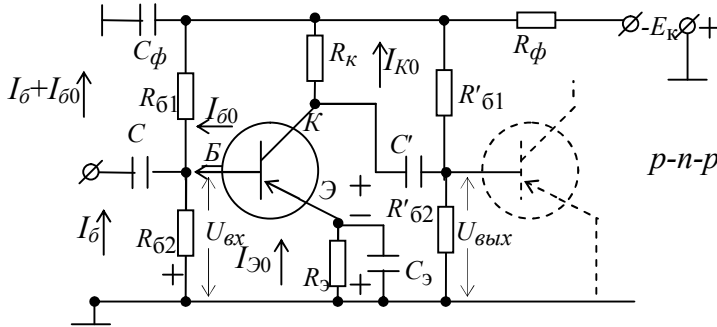


Рис. 10.11

Вспомогательные цепи: фильтр  $R_{ф}C_{ф}$ , эмиттерный стабилизатор  $R_{э}C_{э}$  не являются обязательными, поэтому анализ свойств будем проводить без этих элементов. Для этого достаточно предположить, что  $C_{ф}$  и  $C_{э}$  стремятся к бесконечности, т.е. тогда  $R_{ф}$  и  $R_{э}$  замкнуты накоротко.

Назначение элементов:

$R_{б1}$ ,  $R_{б2}$  и  $R'_{б1}$ ,  $R'_{б2}$  - сопротивления для подачи начального смещения на базу транзисторов;  $R_{б1}$  и  $R_{б2}$  выбираются достаточно малыми, чтобы ток  $I_{б}$ , проходящий через них, во много раз превышал ток базы  $I_{б0}$ . В этом случае потенциал базы относительно земли почти не зависит от тока базы.

$R_{к}$  - сопротивление нагрузки по постоянному току и предназначено для подачи постоянного напряжения на коллектор;

$R_{ф}C_{ф}$  - низкочастотный (НЧ) фильтр по постоянному напряжению;

$C$  и  $C'$  - переходные емкости;

$R_{э}$  - сопротивление температурной стабилизации.

$C_{э}$  - устраняет обратную связь по переменному току (шунтирует  $R_{э}$  по переменному току).

Дело в том, что если начальный режим характеризуется точкой (см. рис.

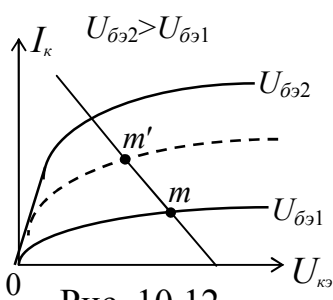


Рис. 10.12

10.12)  $m$ , то с увеличением температуры характеристика смещается вверх и рабочая точка занимает уже другое положение. При наличии сопротивления  $R_{э}$  имеет место обратная связь по току, т.е. с увеличением тока коллектора  $I_{к0}$ , а значит и эмиттерного тока  $I_{э0}$ , возрастает падение напряжения  $I_{э0}R_{э}$  и, т.к.  $I_{э0} = I_{к0} + I_{б0}$ , постоянное напряжение на базе  $U_{бэ} = U_{б0} - I_{б0}R_{бэкв} - I_{э0}R_{э}$  уменьшается, т.к.



направлено минусом к эмиттеру, что уменьшает ток  $I_{\varepsilon} \approx I_K$ . Это способствует возвращению исходной рабочей точки обратно, то есть имеет место стабилизация режима.

Здесь  $U_{\varepsilon 0} = E_K \frac{R_{\varepsilon 2}}{R_{\varepsilon 1} + R_{\varepsilon 2}}$  - напряжение между базой и землей, определяющее

положение начальной рабочей точки и зависимое от источника питания.

$R_{\varepsilon_{\text{экв}}} = \frac{R_{\varepsilon 1} R_{\varepsilon 2}}{R_{\varepsilon 1} + R_{\varepsilon 2}}$  - параллельное включение  $R_{\varepsilon 1}$  и  $R_{\varepsilon 2}$  относительно точек  $B \div \varepsilon$ ,

$I_{\varepsilon 0} R_{\varepsilon_{\text{экв}}}$  - падение напряжения за счет базового тока.

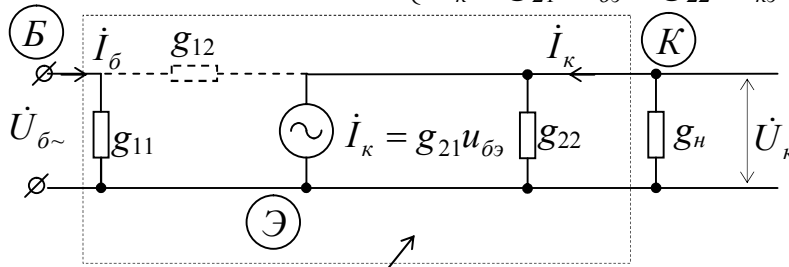
### 10.2.1. Эквивалентные схемы апериодического усилителя

Под частотной характеристикой усилителя понимают зависимость от частоты комплексного коэффициента усиления напряжения  $\dot{K}(j\omega)$ . Апериодическим называется такой усилитель, у которого амплитудно-частотная характеристика  $|\dot{K}(j\omega)|$  сохраняет равномерность в широкой области частот - от единиц герц до десятков кГц.

Из рассмотренных ранее условий:

$|g_{12}| \ll |g_{21}|$ ,  $|g_{12}| \ll |g_{11}|$  и  $|g_{12}| \ll |g_{22}|$ , т.е. отсутствует обратная связь с коллектора на базу через  $g_{12}$  (примем  $g_{12} = 0$ ), тогда  $g_{12} U_K = 0$ , т.е. из уравнений (10.3) и (10.4) имеем:

$$\begin{cases} \Delta i_{\varepsilon} = g_{11} \Delta u_{\varepsilon \varepsilon}, \\ \Delta i_K = g_{21} \Delta u_{\varepsilon \varepsilon} + g_{22} \Delta u_{K \varepsilon}. \end{cases} \quad (10.11)$$



транзистор  
Рис. 10.13

Тогда из выбранных направлений токов  $\dot{I}_K$  и напряжения  $\dot{U}_K$  получим  $\dot{I}_K = -\dot{U}_K g_H$ . Подставив во второе уравнение системы (10.11), найдем для гармонических колебаний  $g_{21} \dot{U}_{\varepsilon \varepsilon} + (g_{22} + g_H) \dot{U}_K = 0$ . Отсюда, комплексный коэффициент передачи четырехполюсника, изображенного на рис. 10.13, равен:

$$\dot{K}(j\omega) = -\frac{g_{21}}{g_{22} + g_H}.$$

Учтем влияние всех элементов схемы, изображенной на рис. 10.13.

Будем считать, что для всех частот  $C_{\varepsilon}$  и  $C_{\phi}$  замыкаются накоротко. Поэтому  $R_{\phi}$ ,  $C_{\phi}$  и  $R_{\varepsilon}$ ,  $C_{\varepsilon}$  опускаем из эквивалентной схемы.



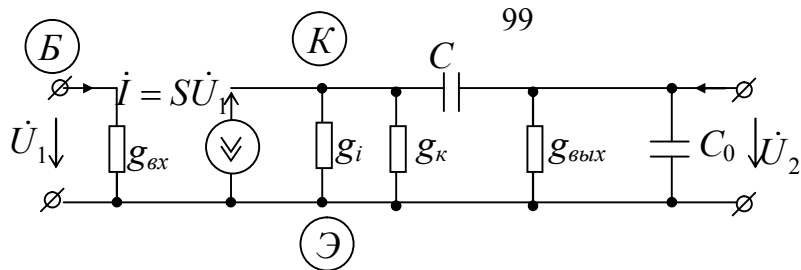


Рис. 10.14

На рис. 10.14

$$g_{вых} = g'_{\delta 1} + g'_{\delta 2},$$

$$g_n = g_k,$$

$I = S\dot{U}_1$  - генератор тока,

$g_i = g_{22}$  - внутренняя проводимость генератора тока,

$$S = g_{21},$$

$$g_{ex} = g_{11}.$$

а) Область средних частот.

В этой области частот можно пренебречь переходной емкостью  $C$  и емкостью монтажа  $C_0$ .

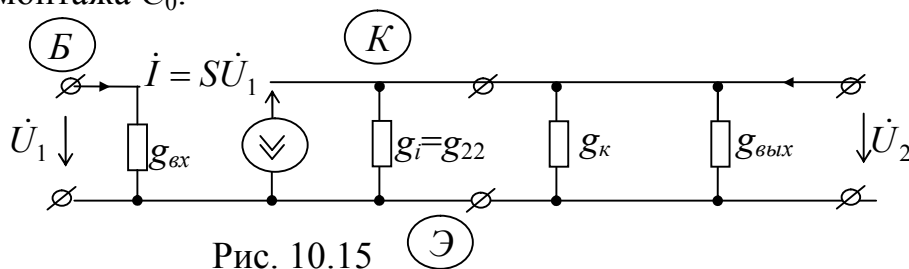


Рис. 10.15

Обозначим  $g_0 = g_i + g_k + g_{вых}$ ,

$$K_0 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-\dot{I}/g_0}{\dot{U}_1} = -\frac{S\dot{U}_1}{g_0 \cdot \dot{U}_1} \approx -\frac{S}{g_0}.$$

Обычно  $g_{вых} \ll g_i$ , следовательно,

$$K_{сч} \approx -\frac{S}{g_i + g_k} = -\frac{S}{g_{22} + g_k}. \tag{10.12}$$

б) Область низких частот.

В этой области можно не учитывать емкость монтажа  $C_0$ .

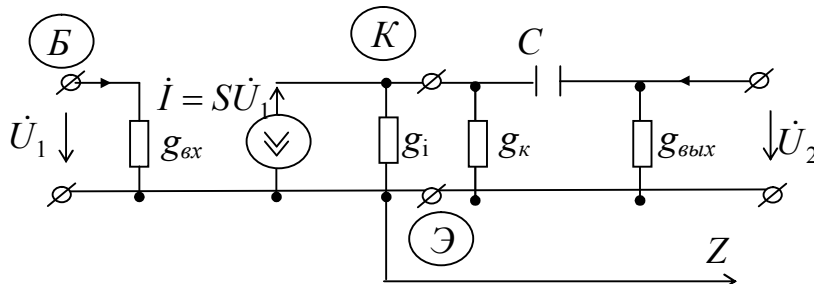


Рис. 10.16

Напряжение снимается с сопротивления  $R_{вых} = \frac{1}{g_{вых}}$ .



В схеме в точках  $K$  и  $\mathcal{E}$  имеет место делитель напряжения на элементах  $R_{\text{вых}}$  и  $\frac{j}{\omega C}$ , т.е. напряжение  $U_{K\mathcal{E}}$  в точках  $K$  и  $\mathcal{E}$  делится между сопротивлением  $R_{\text{вых}}$  и импедансом  $\frac{j}{\omega C}$ . Отсюда

$$\dot{K}_{HЧ} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_{K\mathcal{E}}}{\dot{U}_1} \cdot \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_{K\mathcal{E}}} \approx \dot{K}_0(j\omega) \frac{R_{\text{вых}}}{R_{\text{вых}} - \frac{j}{\omega C}}.$$

Обозначим  $R_{\text{вых}}C = \tau_{HЧ}$ , тогда получим:

$$\dot{K}_{HЧ} \approx \frac{K_0}{1 - j \cdot \frac{1}{\omega \tau_{HЧ}}}. \quad (10.13)$$

$|\dot{K}_{HЧ}| \approx \frac{K_0(\omega)}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau_{HЧ}^2}}}$ , т.е. имеет место завал по нижним частотам,

обусловленный влиянием переходной емкости.

Отсюда  $\dot{K}_{HЧ} \approx |\dot{K}_{HЧ}| \cdot e^{-j(\pi + \varphi_n)}$ ,

$$\text{tg} \varphi_n = -\frac{1}{\tau \omega_{HЧ}}.$$

В области средних частот сдвиг фаз между напряжениями на входе и выходе равен  $\pi$ , а при низкой частоте фазовый сдвиг отличается от  $\pi$  на угол  $\varphi_n$ .

в) Область верхних частот.

В этой области частот можно пренебречь влиянием переходной емкости.

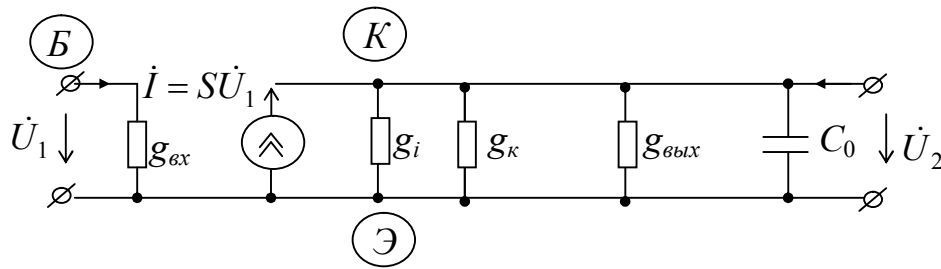


Рис. 10.17

Для этой схемы  $\dot{Y}_{\text{вых}} = g_i + g_к + g_{\text{ввых}} + j\omega C_0 = g_0 + j\omega C_0$ ,

где  $g_0 = g_i + g_к + g_{\text{ввых}}$ .

Тогда коэффициент усиления на верхних частотах  $\dot{K}_{BЧ} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-\dot{I}}{\dot{Y}_{\text{вых}}}$ ,

$$\dot{K}_{BЧ} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = -\frac{S\dot{U}_1}{\dot{U}_1(g_0 + j\omega C_0)} = -\frac{\dot{Y}_{21}}{\dot{Y}_{\text{вых}}}.$$

Вообще говоря, крутизна  $S$  все-таки зависит от частоты!



Вспомним, что  $\dot{S} \rightarrow \dot{Y}_{21}$ , тогда без вывода, используя эквивалентную схему транзистора - схему Джиаколетто, можно записать:

$$\dot{Y}_{21} = \dot{S} = \frac{S}{1 + j\omega\tau_s},$$

где  $\tau_s = (C_{БЭ} + C_K) \cdot R_{экв}$ .

Обозначим  $K_0 = -\frac{S}{g_0}$ , тогда

$$\dot{K}_{ВЧ} = \frac{K_0 / (1 + j\omega\tau_s)}{1 + j\omega\tau_0},$$

где  $\tau_0 = R_0 C_0$ ,  $R_0 = \frac{1}{g_0}$ .

Итак, с ростом частоты усиление каскада на биполярном транзисторе падает: во-первых, уменьшается крутизна, во-вторых - выходная емкость транзистора и емкость монтажа шунтируют нагрузку.

Обе причины приводят к тому, что с повышением частоты напряжение на нагрузке падает. При этом главным фактором является зависимость крутизны от частоты (в зависимости от реактивных параметров транзистора)

$$\dot{K}_{ВЧ} = -\frac{K_0}{1 + j\omega\tau_{ВЧ}},$$

где  $\tau_{ВЧ} = \tau_s + \tau_{экв}$ ,  $\tau_s = (C_{БЭ} + C_K) \cdot R_{экв}$ ,  $\tau_{экв} = C_{экв} R_{экв}$ .

$$|\dot{K}_{ВЧ}| = \frac{K_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_{ВЧ}^2}}, \quad (10.14)$$

$$\dot{K}_{ВЧ} = |\dot{K}_{ВЧ}| \cdot e^{-j(\pi - \varphi_{ВЧ})}, \quad \varphi_{ВЧ} = \arctg \omega \tau_{ВЧ}.$$

В результате нормированы частотная и фазовая характеристики апериодического усилителя во всем диапазоне частот имеет вид, показанный на рис. 10.18

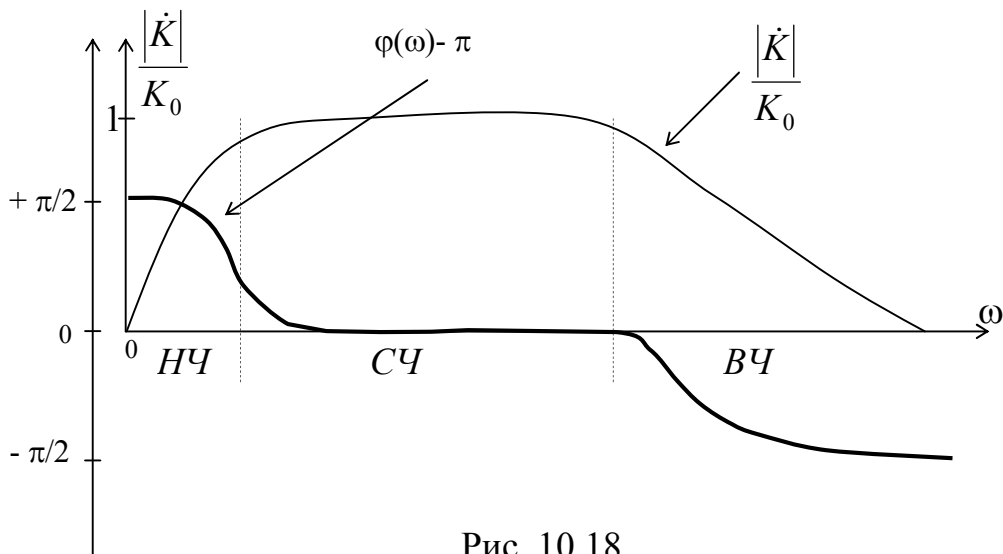


Рис. 10.18



### 10.2.2. Динамические нагрузочные характеристики усилителя

Динамическими характеристиками усилительного каскада называют зависимость между мгновенными значениями токов и напряжений в цепи усилительного устройства при наличии нагрузки.

По динамическим характеристикам находят положение начальной рабочей точки (точки покоя) на семействе статических характеристик, определяют нелинейные искажения, по ним можно найти усиление каскада и т.д.

Нагрузка усилителя в общем случае является комплексной. Назовем сопротивление нагрузки по постоянному току  $R_{\sim}$ , а сопротивление нагрузки по переменному току  $Z = R_{\sim} + jX$ , где  $R_{\sim}$  - активное сопротивление,  $X$  - реактивное сопротивление. Соответственно будем рассматривать динамические характеристики по постоянному току и по переменному.

Рассмотрим выходные динамические характеристики для усилительного каскада на биполярном транзисторе (рис. 10.19).

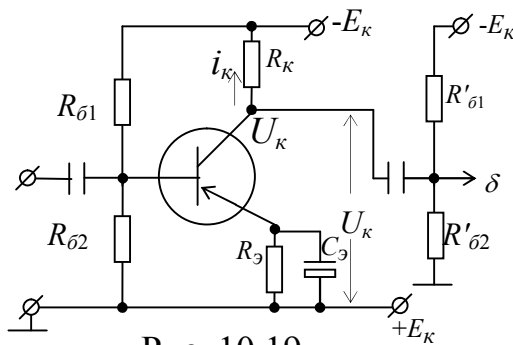


Рис. 10.19

На рис. 10.20 изображено семейство выходных характеристик каскада с общим эмиттером на  $p-n-p$  биполярном транзисторе.

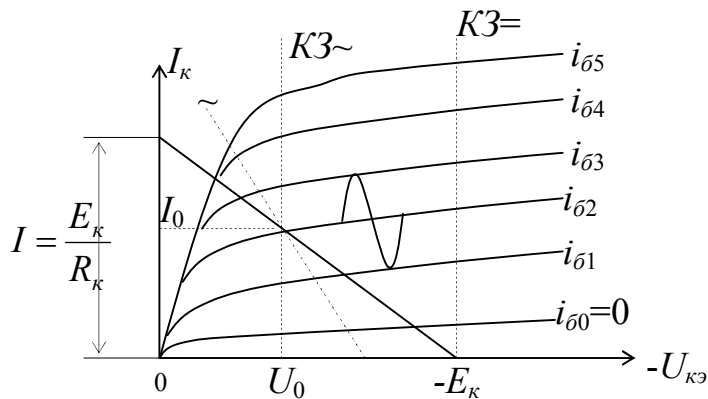


Рис. 10.20

Нагрузочная прямая по постоянному току снимается без подачи сигнала. Нагрузка по постоянному току  $R_{\sim} = R_K$ . Тогда

$$U_K = E_K - i_K R_K \quad (10.15)$$

По этой прямой можно найти положение начальной рабочей точки  $U_0 = E_K - I_0 R_K$ . Можно также найти режим холостого хода при  $R_K \rightarrow \infty$  и короткого замыкания при  $R_K = 0$ .



По переменному току нагрузочные характеристики строятся с поданным сигналом, т.е.

$$i_{\text{вых}} = I_0 + \Delta i_{\text{вых}},$$

где  $\Delta i_{\text{вых}}$  - мгновенные значения тока сигнала в выходной цепи.

В этом случае уравнение нагрузочной характеристики

$$U_{\text{вых}} = E_K - (I_0 R_K + \Delta i_{\text{вых}} R_{\sim}) = U_0 - \Delta i_{\text{вых}} R_{\sim} \quad (10.16)$$

При активной нагрузке, проходящая через точку покоя динамическая характеристика по переменному току идет под большим углом, т.к.  $R_K$  и  $R'_{B2}$  включены параллельно, то  $R_{\sim} < R_K$ . При комплексной нагрузке нагрузочная характеристика, являющаяся траекторией движения рабочей точки на семействе выходных характеристик, уже не представляет собой прямую вследствие появления сдвига по фазе между током  $i_K$  и напряжением  $U_{KЭ}$  в выходной цепи.

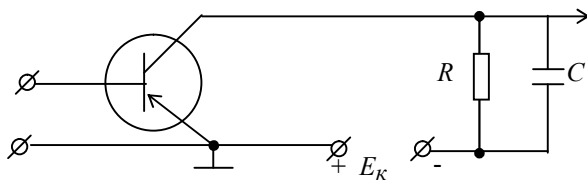


Рис. 10.21

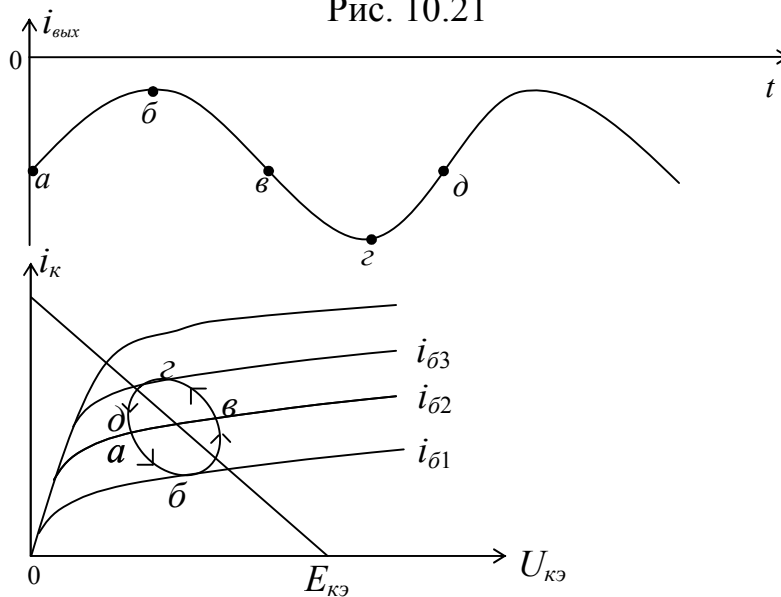


Рис. 10.22

Из сравнения со случаем активной нагрузки видно, что выходная динамическая характеристика переменного тока при комплексной нагрузке имеет вид наклоненного эллипса с центром в точке покоя.

### 10.2.3. Нелинейные искажения в апериодическом усилителе

Нелинейными искажениями сигнала называют изменения его формы, вызванные нелинейными элементами, включенными в схему усилителя (транзисторы, эл. лампы и т.д.).



- Нелинейные искажения по входу

Нелинейные искажения по входу связаны с нелинейностью входной характеристики  $i_{\delta}=f(U_{\delta\delta})$ , т.к. выходной ток транзистора в первом приближении пропорционален входному току, то эти нелинейные искажения передаются в выходную цепь.

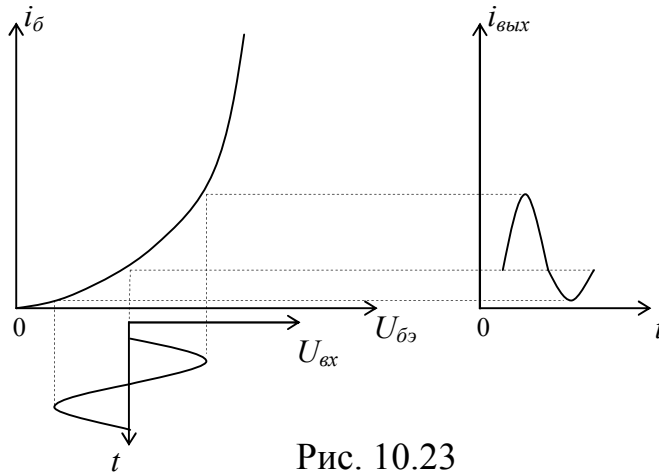


Рис. 10.23

- Нелинейные искажения по выходу

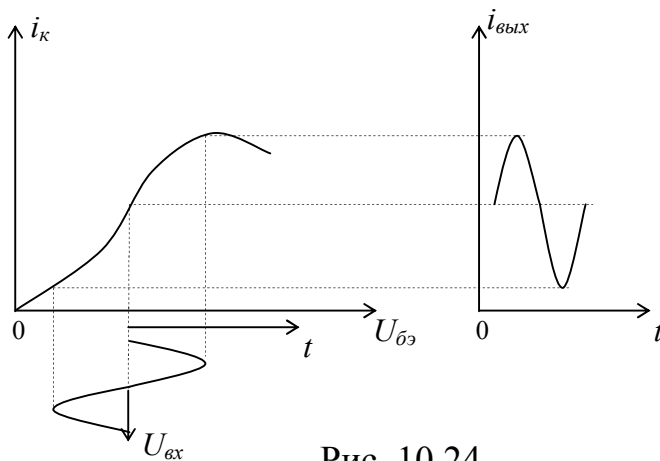


Рис. 10.24

Снижение КУ тока при больших амплитудах подводимого к транзистору сигнала приводит к тому, что даже при синусоидальной форме входного тока (на рис. 10.24) выходной ток оказывается несинусоидальным. Как видно из рис. 10.24 у выходного тока «сплющивается» верхушка верхней полуволны.

Если учесть, что в результате нелинейных искажений во входной цепи «сплющивается» нижняя полуволна, то в целом амплитуда сигнала на выходе будет при превышении определенных амплитуд уменьшаться. Динамический диапазон усилителя оценивается по его амплитудной характеристике.



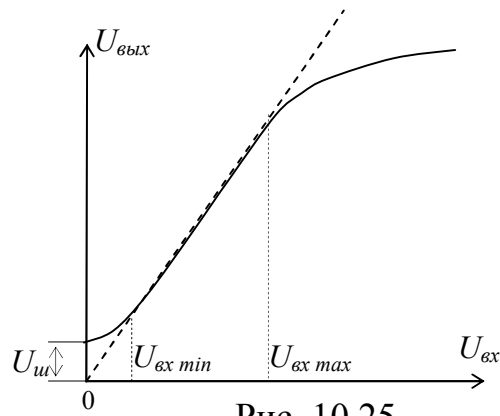


Рис. 10.25

Амплитудная характеристика – зависимость амплитуды (или действующего значения) напряжения на выходе от амплитуды (или действующего значения) напряжения сигнала на входе (рис. 10.25).

Динамический диапазон усилителя:

$$D_y = \frac{U_{\text{вх max}}}{U_{\text{вх min}}}; \quad D_y (\text{дб}) = 20 \lg D_y = 20 \lg \frac{U_{\text{вх max}}}{U_{\text{вх min}}}. \quad (10.17)$$

Коэффициент гармоник (клир-фактор)

$$K_p = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{I_1} = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1}, \quad (10.18)$$

где  $I_1, I_2, \dots$  – действующие или амплитудные значения первой, второй и т.д. гармоник входного тока,

$U_1, U_2, \dots$  – действующие или амплитудные значения первой, второй и т.д. гармоник входного напряжения.

#### 10.2.4. Эмиттерный повторитель (каскад с общим коллектором)

Коллектор транзистора в схеме усилителя с общим коллектором по переменному току заземлен через источник питания  $E_K$  (рис.10.26).

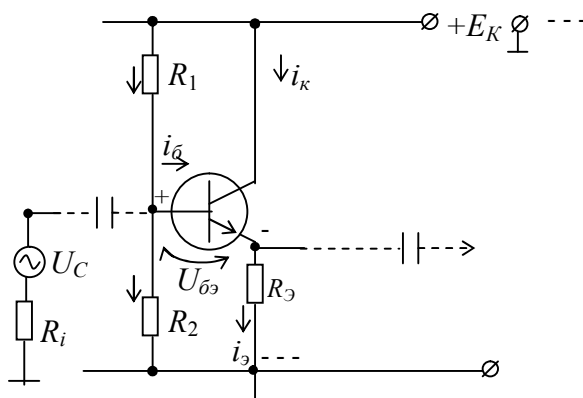


Рис. 10.26

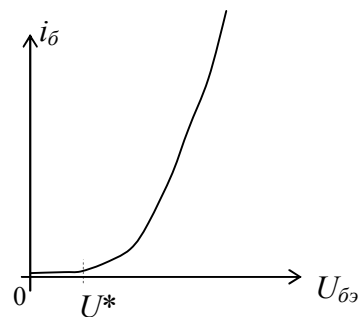


Рис. 10.27



а) Режим работы по постоянному току определяется сопротивлением  $R_Э$  и в отсутствии сигнала на входе:

$$U_C=0, U_{ynp}=U_{бэ}=U_{R2}-U_{Rэ}, U_{ynp}>U^*.$$

Предположим, что возрос хотя бы один из токов транзистора (например, из-за температуры). Это приводит к возрастанию тока эмиттера  $I_э$ , увеличению  $U_{Rэ}$  и, следовательно, к уменьшению  $U_{ynp}$  (оставаясь больше 0), т.к.  $U_{R2}$  задается источником питания  $E_K$  и остается постоянным. В результате уменьшается ток базы и, следовательно, другие токи. Здесь имеет место последовательная ООС по току.

Такой эффект стремится поддержать неизменными токи покоя транзистора, т.е. стабилизирует положение начальной рабочей точки. Стабилизация тем эффективнее, чем выше  $R_Э$ . Т.е. в эмиттерном повторителе  $R_Э$  – это элемент и температурной стабилизации, и нагрузки, и обратной связи.

б) Рассмотрим режим работы каскада по переменному току:  $U_C \neq 0$ .

Рассматриваемый усилитель – это усилитель напряжения. На входе источник сигнала – это источник напряжения, т.е.  $R_i \ll R_{вх}$  и выполняется условие согласования по напряжению.

Что является входным сопротивлением?

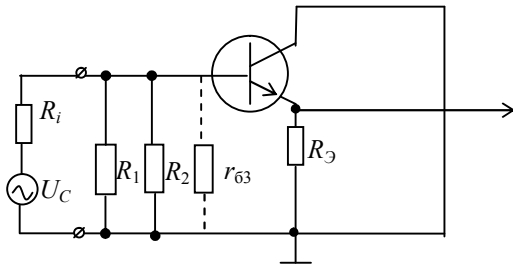


Рис. 10.28

Схема по переменному току изображена на рис. 10.28. Здесь:  $r_{бэ}$  сопротивление между базой транзистора и землей,  $R_{вх}$  определяется параллельным включением сопротивлений  $(R_1 || R_2)$ ,  $R_{вх max} = r_{бэ}$ .

Для того, чтобы эти резисторы не уменьшили  $R_{вх}$ , необходимо чтобы выполнялось условие  $(R_1 || R_2) \gg r_{бэ}$ . Тогда эквивалентная схема (рис. 10.28) упрощается (см. рис.10.29).

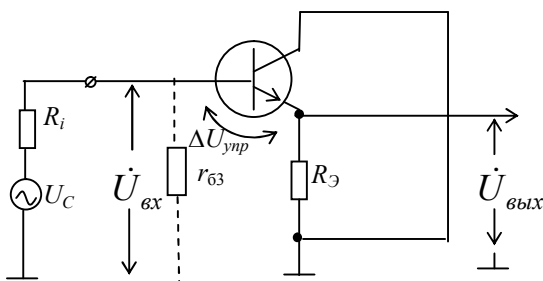


Рис. 10.29

$$\Delta \dot{U}_{ynp} = \dot{U}_{вх} - \dot{U}_{вых}, \dot{U}_{вх} = \Delta \dot{U}_C.$$

Здесь последовательная обратная связь по напряжению.

При глубокой обратной связи (большое  $R_Э$ )

$$|\Delta \dot{U}_{ynp}| \ll |\Delta \dot{U}_C|, |\dot{U}_{вых}|.$$

$$\text{Т.е. } |\dot{K}| = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}} \approx 1 \quad (10.19)$$

В этом смысле усилитель называется повторителем. Такие усилители не изменяют полярности входного сигнала, имеют высокое входное и низкое выходное сопротивление.



### 10.3. Усилитель постоянного тока (УПТ)

Зачастую бывает необходимо усилить сигнал с очень низкими частотами (включая постоянную составляющую). На рис. 10.30 приведена схема УПТ на биполярном  $n-p-n$  транзисторе.

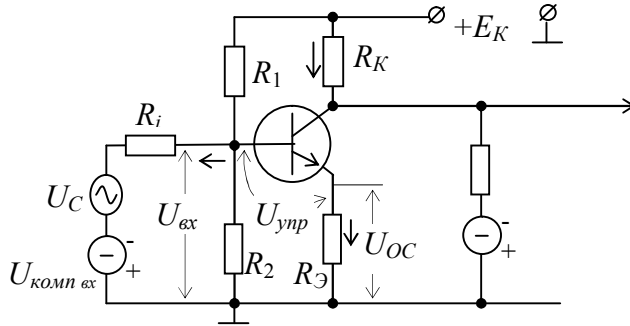


Рис. 10.30

$U_{комп\ ex}$  необходим для того, чтобы при  $U_C=0$ , напряжение тока покоя базы первого транзистора было равно также нулю.

Таким образом, в УПТ отсутствуют элементы, предназначенные для отделения усилительных каскадов по постоянному току, в результате схема подвержена дрейфу нуля. Необходима стабилизация режимов УПТ.

Определим коэффициент усиления УПТ

$$\begin{aligned} \dot{U}_{вых} &= -\dot{I}_K R_K \\ \dot{U}_{ex} &= \dot{U}_{ynp} + \dot{U}_{R_2} \approx \dot{U}_{R_2}; \quad \dot{U}_{R_2} = \dot{U}_{OC} \\ |\dot{U}_{ynp}| &\ll |\dot{U}_{ex}|, |\dot{U}_{R_2}| \\ \dot{U}_{R_2} &= \dot{I}_2 R_2, \text{ т.к. } \dot{I}_2 \approx \dot{I}_K, \text{ то } \dot{K} = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{ex}} = -\frac{\dot{I}_K R_K}{\dot{I}_2 R_2} = -\frac{R_K}{R_2} \\ K &= -\frac{R_K}{R_2} \end{aligned} \quad (10.20)$$

Для уменьшения дрейфа нуля широко используются дифференциальные усилители.

### 10.4. Дифференциальный усилитель (ДУ)

Дифференциальным усилителем (ДУ) называется устройство, усиливающее разность двух напряжений. Первые ДУ создавались для биологических исследований. Если при измерении небольшой разности двух больших потенциалов измерить сами большие потенциалы, то усилитель переходит в нелинейный режим. Отсюда вытекает необходимость измерения только разности потенциалов.



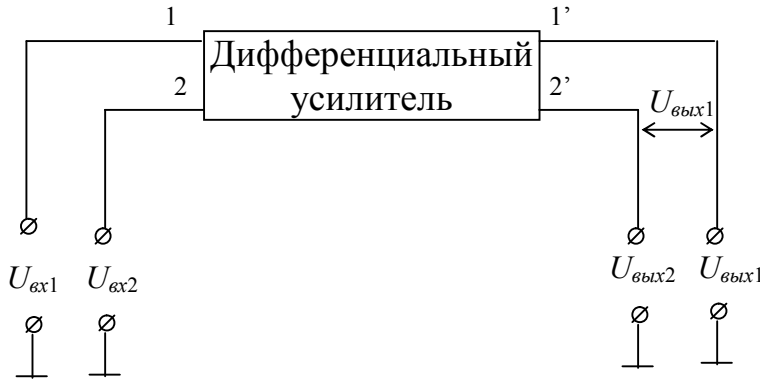


Рис. 10.31

У идеального ДУ коэффициент передачи разностного сигнала равен отношению  $K_P = \frac{\dot{U}_{\text{вых1}} - \dot{U}_{\text{вых2}}}{\dot{U}_{\text{вх1}} - \dot{U}_{\text{вх2}}} = \frac{\dot{U}_{\text{вых12}}}{\dot{U}_{\text{вх1}} - \dot{U}_{\text{вх2}}}$ .

Если выходное напряжение снимается с одного из несимметричных выходов, то коэффициент усиления разностного сигнала  $K_{P1} = \frac{\Delta U_{\text{вых1}}}{U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}}}$ , где  $\Delta U_{\text{вых1}}$  — приращение напряжения на первом выходе, обусловленное разностью входных напряжений  $U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}}$ .

Соответственно  $K_{P2} = \frac{\Delta U_{\text{вых2}}}{U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}}}$ , если напряжение снимается с другого выхода.

При симметрии схемы выполняется  $\Delta U_{\text{вых2}} = -\Delta U_{\text{вых1}}$ , т.е.  $\Delta U_{\text{вых1}} - \Delta U_{\text{вых2}} = 2\Delta U_{\text{вых1}}$ . Откуда  $K_{P1} = -K_{P2} = \frac{K_P}{2}$ .

При симметрии схемы  $U_{\text{вых12}} = K_P(U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}})$ . Однако, реальный усилитель не обладает идеальной симметрией, в результате чего напряжение на выходе зависит не только от разности, но и от суммы входных сигналов.

Сумма входных сигналов, поделенная на два, называется синфазным сигналом.

Выходное напряжение реального усилителя:

$$U_{\text{вых12}} = K_P(U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}}) + K_C \frac{(U_{\text{вх1}} + U_{\text{вх2}})}{2},$$

где  $K_C$  — коэффициент передачи синфазного сигнала.

$$\text{Если } U_{\text{вх1}} = U_{\text{вх2}}, \text{ то } K_C = \frac{U_{\text{вых12}}}{(U_{\text{вх1}} + U_{\text{вх2}})/2}.$$

$$\text{Коэффициент ослабления синфазного сигнала } K_{\text{ОСсф}} = \frac{K_P}{K_C}.$$

У хороших ДУ  $K_{\text{ОСсф}} = 10^4 \div 10^6$  или 80 ÷ 120 дБ.

Рассмотрим схему дифференциального усилителя на биполярных транзисторах.



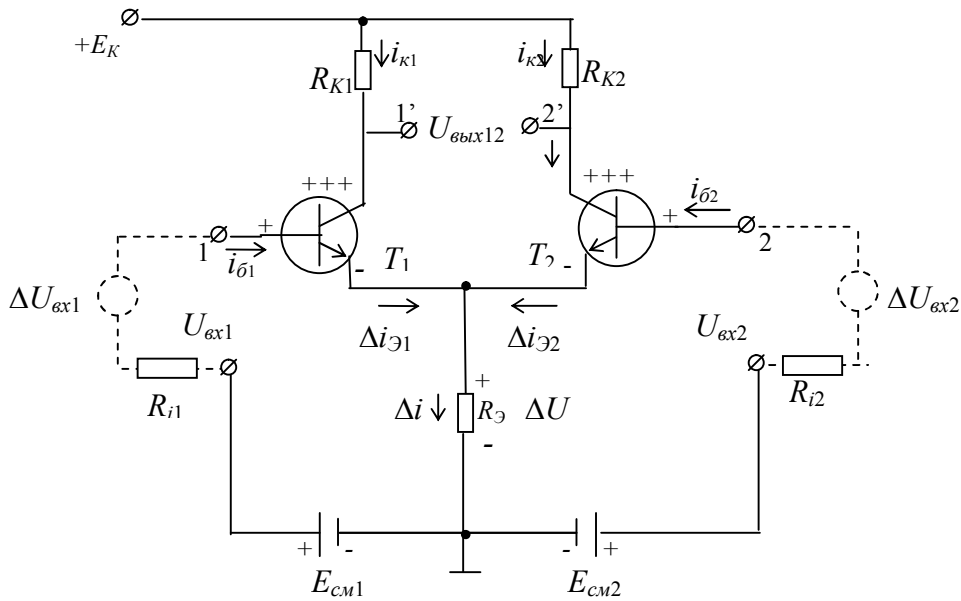


Рис. 10.32 - а

Схема имеет тем большую симметрию, чем больше общее сопротивление  $R_3$  для переменного тока.

а) Пусть есть приращение на первом входе  $\Delta U_{вх1}$ , а потенциал входа 2 относительно земли остался прежним. Это приращение вызовет приращение эмиттерного тока  $\Delta i_{э1}$  транзистора  $T_1$ . За счет прохождения части этого приращения, равной  $\Delta i$ , через сопротивление  $R_3$ . Появление приращения  $\Delta U$  приводит к уменьшению потенциала на эмиттере, что эквивалентно увеличению потенциала базы. Это приводит к приращению тока  $I_{э2}$ .

Очевидно, что при  $R_3 = \infty$ ,  $\Delta i_{э1} = -\Delta i_{э2}$ , т.е.  $\Delta i = 0$ , это стабилизирует рабочую точку, т.е. снимает влияние дрейфа нуля.

б) Действуют синфазные сигналы  $\Delta U_{вх1} = \Delta U_{вх2} = \Delta U_{вх}$ , а токи эмиттера равны  $\Delta i_{э1} = \Delta i_{э2}$ ,  $\Delta i = \Delta i_{э1} + \Delta i_{э2} = 2\Delta i_{э1}$ .

Под действием синфазных сигналов потенциалы эмиттеров изменятся на одинаковую величину (обе половины схемы работают как эмиттерные повторители). Напряжение на  $R_3$  изменится и через него пойдет новый ток, который поровну распределится между обоими транзисторами, коллекторный потенциал изменится одинаково и  $\Delta U_{ббх} = 0$ , т.к.  $R_3$  создает в каждом транзисторе отрицательную обратную связь, уменьшающую синфазные компоненты.

в) Противофазные сигналы на входе.

$$\Delta U_{вх1} = -\Delta U_{вх2}, \text{ т.е. } U_{вх} = \Delta U_{вх1} - \Delta U_{вх2}.$$

Соответственно токи  $\Delta i_{э1} = -\Delta i_{э2}$ , т.е. сумма эмиттерных токов не изменится, т.к. приращения  $\Delta i = \Delta i_{э1} - \Delta i_{э1} = 0$ , а значит, не изменится и потенциал эмиттеров. Такие сигналы не создадут напряжения на  $R_3$ , т.к. равные токи имеют противоположный знак (т.е.  $\Delta i = 0$  и нет отрицательной обратной связи для таких



сигналов). Таким образом, КУ каждого плеча будет такой же, как в обычном усилителе с ОЭ.

$$U_{вых12} = K_P \cdot 2\Delta U_{вх} \quad (10.21)$$

Итак, для создания полезного сигнала необходимо подавать его на базы транзисторов в противоположных фазах. В этом случае напряжение  $U_{вых}$  определяется только входным сигналом и совершенно не зависит от синфазного сигнала и дрейфа нуля. Парафазный сигнал  $U_{вх}$  не создает напряжения на  $R_{Э}$ , т.к. для этого сигнала равные токи транзисторов имеют противоположные фазы.

Резистор  $R_{Э}$  создает в каждом транзисторе отрицательную обратную связь, уменьшающую дополнительно синфазные компоненты.

В результате парафазные сигналы усиливаются без ослабления, а синфазные дополнительно уменьшаются ООС в  $F=(1+SR_{Э})$  раз.

Отметим, что стабильность рабочей точки и подавление синфазного сигнала можно значительно увеличить, если резистор  $R_{Э}$  заменить источником тока. Это эквивалентно тому, что  $R_{Э} \rightarrow \infty$ . Пусть на входе действует синфазный сигнал. Источник тока в эмиттерной цепи поддерживает полный эмиттерный ток постоянным, и он (в силу симметрии схемы) равномерно распределяется между двумя коллекторными цепями. Следовательно, сигнал на выходе схемы не изменится. Здесь дифференциальные усилители действуют по принципу уравновешенного моста, образованного идентичными транзисторами  $T_1, T_2$  и резисторами  $R_{K1}, R_{K2}$ . В одну диагональ моста введены два источника питания  $+E_{K1}$  и  $-E_{K2}$  ( $|E_{K1}| = |E_{K2}|$ ) и источник стабильного тока  $I_3$ .

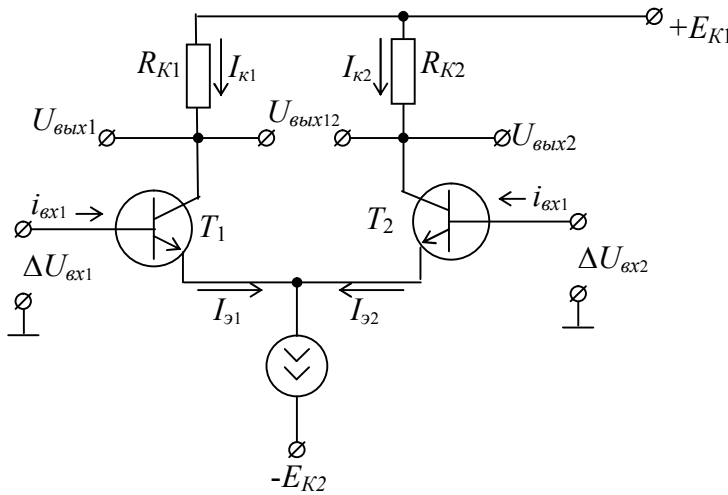


Рис. 10.32 - б

Источник стабильного тока  $I_3 = I_{31} + I_{32} = const$ . При отсутствии входных сигналов мост уравновешен, и выходное напряжение усилителя  $U_{вых} = 0$ .

Пусть выходной сигнал в схеме рис. 10.32 – б снимается с выхода  $U_{вых2}$ , входной сигнал подключен к входу  $U_{вх2}$ , а вход  $U_{вх1}$  заземлен. При подаче на вход  $U_{вх2}$  положительного приращения усиливаемого напряжения  $\Delta U_{вх2}$  увеличивается коллекторный ток  $I_{K2}$  и падение напряжения  $\Delta U_{K2} = I_{K2} \cdot R_{K2}$ . Выходное коллекторное напряжение  $U_{вых2} = E_{K1} - I_{K2} \cdot R_{K2}$  при этом уменьшится и окажется в



противофазе с входным. Вход  $U_{ex2}$  по отношению к выходу  $U_{вых2}$  называется инвертирующим.

Пусть вход  $U_{ex2}$  заземлен, а сигнал подается на вход  $U_{ex1}$ . При увеличении входного сигнала возрастает ток эмиттера  $I_{э1}$  транзистора  $T_1$ , а ток эмиттера  $I_{э2}$  транзистора  $T_2$  уменьшается (т.к.  $I_э = I_{э1} + I_{э2} = const$ ).

При этом ток коллектора  $I_{К2}$  транзистора  $T_2$  и падение напряжения на сопротивлении  $R_{К2}$  уменьшается, выходное напряжение увеличится. Таким образом, выходное напряжение  $U_{вых2}$  оказалось в фазе с входным  $U_{ex1}$ . Вход  $U_{ex1}$  неинвертирующий для выходного сигнала, снимаемого с транзистора  $T_2$ .

Дифференциальные каскады требуют парафазного усиливаемого сигнала, симметричного относительно земли (два одинаковых напряжения противоположных фаз, подаваемые между базами и землей). Здесь имеет место симметричный выходной сигнал.

- Дифференциальный усилитель с однополюсным выходом

Этот усилитель – устройство, усиливающее дифференциальный сигнал и преобразующее его в несимметричный сигнал, с которым могут работать обычные схемы.

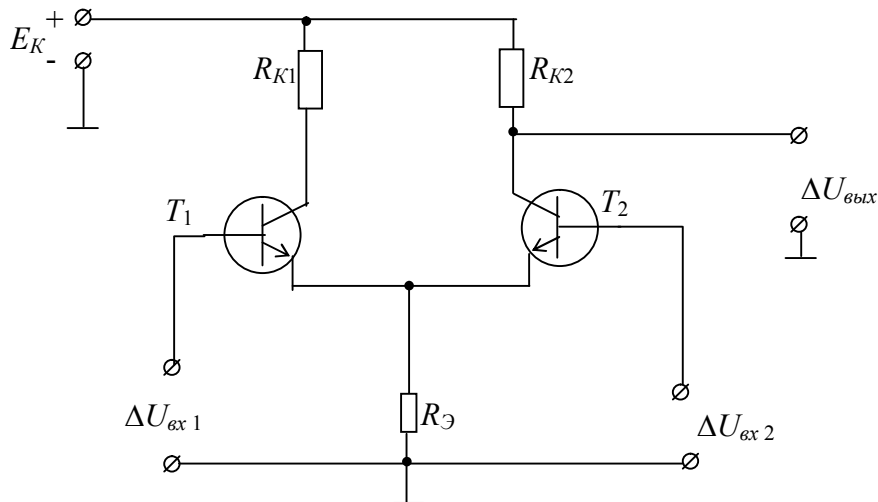


Рис. 10.33

## 10.5. Операционные усилители (ОУ)

Основным элементом операционного усилителя является дифференциальный усилитель.

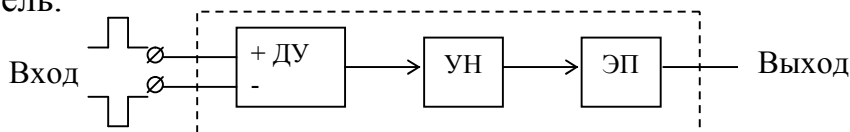


Рис. 10.34

На рисунке 10.34 приведена обобщенная структурная схема операционного усилителя.



Это усилитель с дифференциальным входом и одноктактным выходом, с большим входным и малым выходным сопротивлениями.

Идеальный ОУ

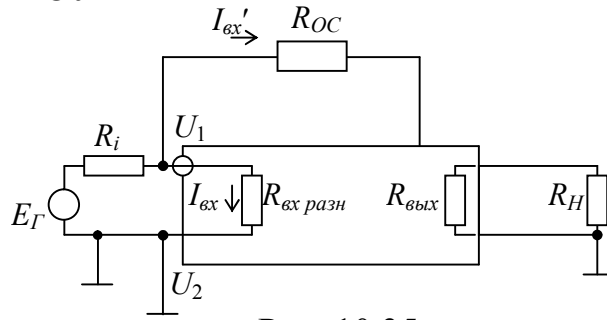


Рис. 10.35

Идеальный ОУ характеризуется следующими параметрами:

$$R_{вх\ разн} = \infty; K_u = \infty; R_{вых} = 0.$$

Если  $R_{вх\ разн} = \infty$ , то  $I_{вх} = 0$ , т.е.  $U_1 - U_2 = 0$ . Итак, два правила идеального ОУ:

- 1) Разность потенциалов между входными контактами равна нулю.
- 2) Вход не потребляет тока ( $I_{вх} = 0$ ).

Пользуясь этими правилами, рассмотрим некоторые каскады, выполненные на ОУ.

а) Инвертирующая схема усилителя напряжения (рис. 10.36).

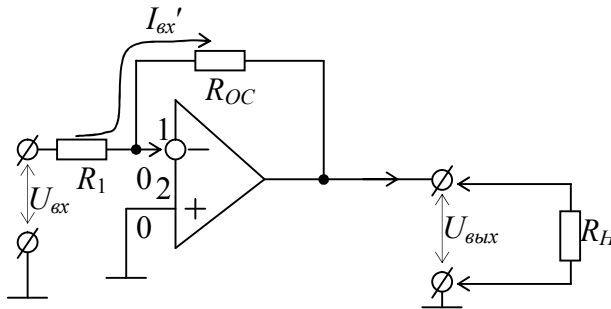


Рис. 10.36

$$I'_{вх} = I_{R_1} = \frac{(U_{вх} - 0)}{R_1}, \text{ т.к. по первому правилу } U_1 = U_2 = 0.$$

По второму правилу  $I_{вх} = 0$ , тогда по первому закону Кирхгофа  $I_{R_{oc}} = I'_{вх}$ . По первому правилу  $U_1 = 0$ , тогда  $U_{вых} = -I'_{вх} \cdot R_{oc}$ .

$$K_U = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = -\frac{R_{oc}}{R_1}; K \approx 10^5 \div 10^6,$$

$$\boxed{K_U = -\frac{R_{oc}}{R_1}}. \tag{10.22}$$

Входное сопротивление  $R_{вх}$  – Мегаомы, т.к. входы не потребляют тока.

$$R'_{вх} = R_1 \parallel R_{вх} \approx R_1, \text{ т.к. } R_{вх} \gg R_1 \quad R_{нагр\ экв} = R_{oc} \parallel R_H = \frac{R_{oc} \cdot R_H}{R_{oc} + R_H}.$$

Выходное сопротивление  $R_{ввых}$  – омы.

Здесь имеет место параллельная обратная связь по напряжению.



б) Неинвертирующая схема усилителя напряжения (рис. 10.37).

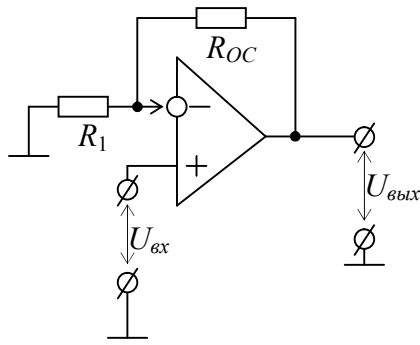


Рис. 10.37

Напряжение с выхода ОУ подается на его инвертирующий вход. Это для инвертирующего входа напряжение последовательной обратной связи по напряжению относительно земли. Коэффициент ОС  $\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_{oc}}$ . Отсюда

$$U_{oc} = \frac{R_1}{R_1 + R_{oc}} \cdot U_{вых}.$$

Поскольку по первому правилу напряжение между входами ОУ равно нулю, т.е.  $\varphi_+ = \varphi_-$ , отсюда  $U_{вх} = U_{oc}$ , то  $K_U = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{R_1 + R_{oc}}{R_1} = 1 + \frac{R_{oc}}{R_1}$ ,

$$\boxed{K_U = 1 + \frac{R_{oc}}{R_1}}. \quad (10.23)$$

в) Повторитель напряжения (здесь на рис. 10.37  $R_{oc} = 0$ ;  $R_1 = \infty$ ).

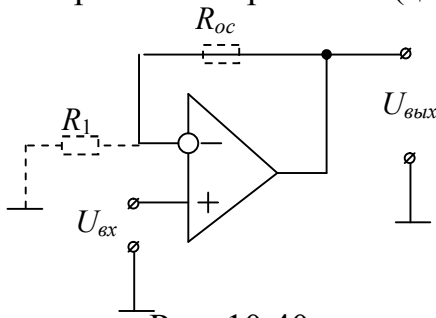


Рис. 10.40

Тогда т.к. для неинвертирующей схемы  $K_U = 1 + \frac{R_{oc}}{R_1}$ ;  $R_{oc} = 0$ ;  $K_U = 1$ .

$$U_{вых} = U_{вх}, R_{вх} = R_{вх \partial} \cdot K_0, R_{вых} = \frac{R_{вых \partial}}{K_0},$$

$K_0$ ,  $R_{вх \partial}$  и  $R_{вых \partial}$  – параметры ОУ без ОС.



г) Разностный усилитель напряжения – это линейный ОУ с двумя входами.

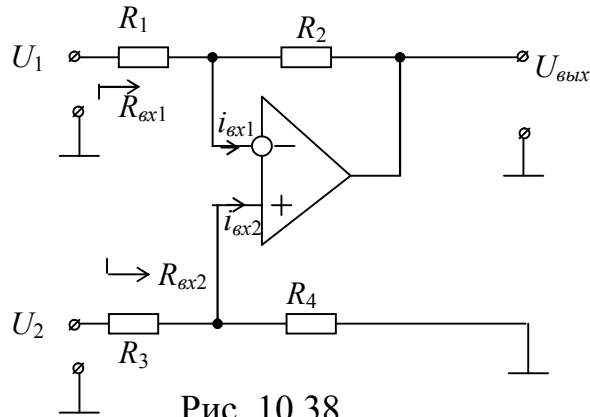


Рис. 10.38

Выходное напряжение найдем методом суперпозиции.

Пусть  $U_2=0$ ,  $U_1 \neq 0$ .

Значит, т.к.  $i_{вх2}=0$  (по 2 правилу), то  $\varphi_+=U_2=0$ , т.е. неинвертирующий вход ОУ заземлен через параллельные  $R_3$  и  $R_4$ . В этих условиях ОУ – инвертор напряжения, в соответствии с (10.22)

$$U_{вых1} = -\frac{R_2}{R_1} U_1.$$

Пусть  $U_1=0$ ,  $U_2 \neq 0$ .

ОУ представляет собой неинвертирующий усилитель, на входе которого включен делитель напряжения  $R_3$ ,  $R_4$ , т.е.  $\varphi_+ = U_2 \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_3}$ . Отсюда:

$$U_{вых2} = U_2 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right), \text{ т.к. } K_U = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \text{ из (10.23).}$$

При балансе схемы  $\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$ . Разделив  $R_4$  на  $R_3$  в выражении для  $U_{вых2}$

имеем при балансе:  $U_{вых2} = U_2 \frac{R_2}{R_1}$ .

Пусть  $U_1 \neq 0$ ,  $U_2 \neq 0$ .

Подав оба напряжения на сбалансированный усилитель (условие баланса  $\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$ ), в соответствии с принципом суперпозиции  $U_{вых} = U_{вых1} + U_{вых2}$  имеем:

$$U_{вых} = \frac{R_2}{R_1} (U_2 - U_1), \quad (10.24)$$

$$K_U = \frac{R_2}{R_1}. \quad (10.25)$$

Выходное напряжение пропорционально разности входных напряжений и не зависит от их величины.

Делитель  $R_3$ ,  $R_4$  уравнивает коэффициенты усиления инвертирующего и неинвертирующего входов (из условия баланса).



д) Инвертирующий усилитель тока.

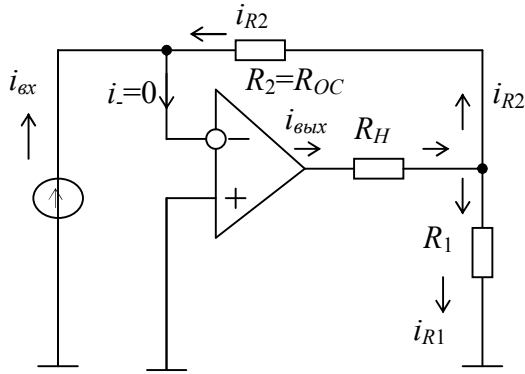


Рис. 10.39

Здесь входной ток  $i_{ex}$ , выходной ток  $i_{вых}$ . Входной ток, поступающий в инвертирующий вход ОУ, компенсируется частью выходного тока.  $i_{ex} = -i_{R2}$ , т.к. по второму правилу  $i_- = 0$ .

$$i_{вых} = i_{R2} + i_{R1}$$

$$U_{R2} = U_{R1} \text{ т.к. по первому правилу потенциалы } \varphi_+ \text{ и } \varphi_- \text{ равны, т.е. } \varphi_+ = \varphi_- = 0.$$

Отсюда:

$$i_{R2} R_2 = i_{R1} R_1 = (i_{вых} - i_{R2}) R_1,$$

$$i_{R2} R_2 = i_{вых} R_1 - i_{R2} R_1,$$

$$i_{R2} = i_{вых} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \text{ или } i_{R2} = i_{вых} \frac{R_1}{R_1 + R_{OC}}.$$

У инвертирующего входа (по первому правилу) потенциал равен нулю, поэтому  $-i_{ex} = i_{R2}$ , (т.к. входы не потребляют ток). Отсюда  $i_{вых} = -\left(1 + \frac{R_{OC}}{R_1}\right) i_{ex}$ , следовательно

$$K_i = -\left(1 + \frac{R_{OC}}{R_1}\right). \tag{10.26}$$

Здесь также как и в (10.22) сопротивление нагрузки не входит. Это означает, что ОУ работает как идеальный источник тока, с бесконечно большим внутренним сопротивлением по отношению к нагрузке, т.е.  $R_{вых} \rightarrow \infty$ .

### 10.6. Частотно-избирательные усилители

Данная узкополосная система совмещает в себе функции усилителя и линейного полосового частотного фильтра.

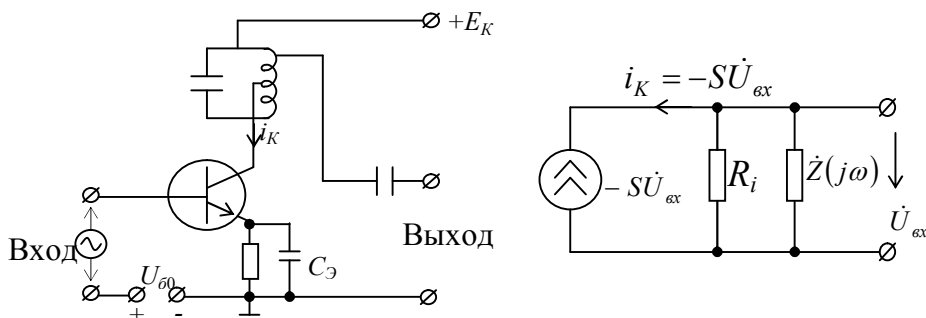


Рис. 10.41



Коэффициент усиления по напряжению:

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = \frac{-S\dot{U}_{\text{вх}} \cdot \dot{Z}_{\text{экв}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = -S \cdot \dot{Z}_{\text{экв}} \quad (10.27)$$

В отличие от резистивно-емкостной нагрузки апериодического усилителя здесь нагрузкой активного элемента служит параллельный колебательный контур. Учитывая то, что входное сопротивление следующего каскада мало, включение этого сопротивления непосредственно параллельно колебательному контуру привело бы к снижению его эквивалентной добротности. Поэтому используют частичное включение контура. Это сделано также для уменьшения шунтирующего действия выходной проводимости и согласования выходного и входного сопротивлений транзисторов.

Обращаясь к эквивалентной схеме усилителя, видим, что ток с комплексной амплитудой  $-S\dot{U}_{\text{вх}}$  поступает от управляемого источника на импеданс

$\dot{Z}_{\text{экв}}(j\omega) = \frac{\dot{Z}(j\omega) \cdot R_i}{\dot{Z}(j\omega) + R_i}$ , где  $R_i$  - шунтирующее внутреннее сопротивление

управляемого источника.

Учитывая, что для параллельного резонансного контура

$$\dot{Z}(j\omega) = \frac{R_{\text{экв}}}{1 + j\xi}, \text{ где } R_{\text{экв}} = Q\rho, \xi = Q \left[ \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right], \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Для параллельно включенных  $R_i$  и  $\dot{Z}$  запишем:

$$\dot{Z}_{\text{экв}}(j\omega) = \frac{\dot{Z}(j\omega) \cdot R_i}{R_i + \dot{Z}(j\omega)} = \frac{R_{\text{экв}} \cdot R_i}{(1 + j\xi) \left[ R_i + \frac{R_{\text{экв}}}{1 + j\xi} \right]},$$

Разделим числитель и знаменатель на  $R_{\text{экв}} + R_i$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{R_{\text{экв}} \cdot R_i}{R_{\text{экв}} + R_i}}{(1 + j\xi) \left[ R_i + \frac{R_{\text{экв}}}{1 + j\xi} \right]} = \frac{\frac{R_{\text{экв}}}{1 + \frac{R_{\text{экв}}}{R_i}}}{\frac{R_i}{R_{\text{экв}} + R_i} + \frac{R_{\text{экв}}}{R_{\text{экв}} + R_i} + j \frac{R_i \xi}{R_{\text{экв}} + R_i}} = \\ & \frac{\frac{R_{\text{экв}}}{1 + \frac{R_{\text{экв}}}{R_i}}}{\frac{R_{\text{экв}} + R_i}{R_{\text{экв}} + R_i} + \frac{R_{\text{экв}}}{R_{\text{экв}} + R_i} + j \frac{R_i \xi}{R_{\text{экв}} + R_i}} = \\ & \frac{\frac{R_{\text{экв}}}{1 + \frac{R_{\text{экв}}}{R_i}}}{1 + j \frac{\xi}{1 + \frac{R_{\text{экв}}}{R_i}}} = \frac{R'_{\text{экв}}}{1 + j\xi_{\text{экв}}}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $Z_{\text{экв}} = \frac{R'_{\text{экв}}}{1 + j\xi_{\text{экв}}}$ ,

где



$$R'_{\text{экв}} = \frac{R_{\text{экв}}}{1 + \frac{R_{\text{экв}}}{R_i}}; \quad \xi_{\text{экв}} = \frac{\xi}{1 + \frac{R_{\text{экв}}}{R_i}}.$$

$R'_{\text{экв}}$  – эквивалентное сопротивление контура усилителя при резонансе с учетом внутреннего сопротивления источника.

Т.к.  $\xi = Q \left[ \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right]$ , можно считать, что влияние внутреннего сопротивления  $R_i$  состоит в том, что добротность колебательной системы уменьшается и становится равной эквивалентной добротности

$$Q_{\text{экв}} = \frac{Q}{1 + \frac{R_{\text{экв}}}{R_i}}. \quad (10.29)$$

Итак, для ослабления шунтирующего действия активного элемента на колебательную систему без расширения полосы пропускания усилителя следует уменьшить резонансное сопротивление  $R_{\text{экв}}$ , применяя неполное включение контура, т.к.  $R_{\text{экв}} = Q_{\text{экв}} \cdot \rho$ .

Поскольку комплексная амплитуда гармонического сигнала на выходе усилителя  $\dot{U}_{\text{вых}} = -S\dot{Z}_{\text{экв}} \dot{U}_{\text{вх}}$ , частотный коэффициент передачи

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = -\frac{SR'_{\text{экв}}}{1 + j\xi_{\text{экв}}} = -\frac{K_{\text{max}}}{1 + j\xi_{\text{экв}}}. \quad (10.30)$$

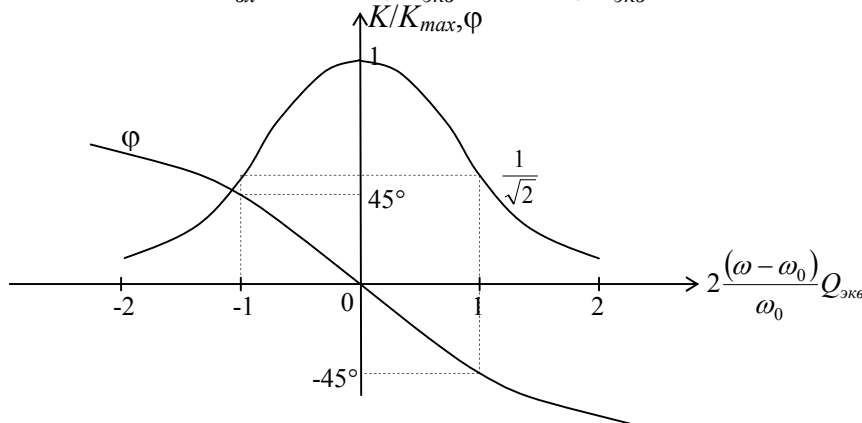


Рис. 10.42

Отсюда следует АХЧ и ФХЧ при малых расстройках:

$$|\dot{K}(j\omega)| = \frac{SR'_{\text{экв}}}{\sqrt{1 + 4Q_{\text{экв}}^2 (\omega - \omega_0)^2 / \omega_0^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \pi - \text{arctg}[2Q_{\text{экв}} (\omega - \omega_0) / \omega_0]$$

или  $\dot{K}(j\omega) = -\frac{K_{\text{max}}}{\sqrt{1 + \alpha_k^2}} e^{-j \text{arctg} \alpha_k}$ , где  $K_{\text{max}} = SR'_{\text{экв}}$  – максимальное усиление

на резонансной частоте.



$$\alpha_k = \frac{2Q_{экв}(\omega - \omega_0)}{\omega_0} = (\omega - \omega_0)\tau_k, \quad \tau_k = \frac{2Q_{экв}}{\omega_0},$$

$$|\dot{K}(j\omega)| = \frac{K_{\max}}{\sqrt{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_k^2}}. \quad (10.31)$$

### 10.6.1. Линейные искажения АМ колебания в резонансном усилителе

Пусть на вход одноконтурного усилителя, изображенного на рис. 10.43, воздействует колебание  $U_{ex}(t) = E_0[1 + m \cos(\Omega t + \phi_0)]\cos(\omega t + \varphi)$ .

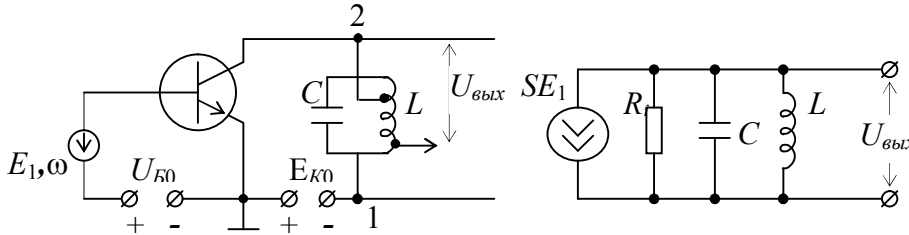


Рис. 10.43

Колебательный контур, входящий в усилитель, является инерционной цепью, что не может не повлиять на параметры выходного сигнала. Учитывая, что рассматриваем усилитель в линейном приближении, структуру колебания на выходе проще рассматривать как прохождение через усилитель каждой из спектральных составляющих отдельно. Итак,

$$\dot{S}_{вых}(\omega) = \dot{S}_{ex}(\omega) \cdot \dot{K}(j\omega),$$

$$U_{ex}(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) + \frac{mE_0}{2} \cos[(\omega + \Omega)t + \varphi + \phi_0] +$$

$$+ \frac{mE_0}{2} \cos[(\omega - \Omega)t + \varphi - \phi_0].$$

Найдем передаточную функцию, положив расстройку  $\omega_0 - \omega = 0$ . Получаем из (10.31):

- для несущей частоты  $\omega = \omega_0$ ,  $\varphi = \phi_0$ .

$$\dot{K}(j\omega) = -K_{\max};$$

- для верхней боковой  $\omega_0 + \Omega$

$$\dot{K}[j(\omega_0 + \Omega)] = -\frac{K_{\max}}{1 + j\Omega\tau_k} = -\frac{K_{\max}}{\sqrt{1 + (\Omega\tau_k)^2}} \cdot e^{-j\theta}; \quad (10.32)$$

- для нижней боковой  $\omega_0 - \Omega$

$$\dot{K}[j(\omega_0 - \Omega)] = -\frac{K_{\max}}{1 - j\Omega\tau_k} = -\frac{K_{\max}}{\sqrt{1 + (\Omega\tau_k)^2}} \cdot e^{j\theta}, \quad (10.33)$$

где  $\theta = \arctg \Omega\tau_k$  – фазовый сдвиг в колебательном контуре на боковых частотах (запаздывание на верхней и опережение на нижней боковых частотах).



С учетом амплитудных и фазовых изменений, претерпеваемых спектральными составляющими в усилителе, можно представить выходное колебание в форме, аналогичной АМ колебанию:

$$U_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{max}} E_0 \left\{ \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{m}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega \tau_k)^2}} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \phi_0 - \theta] + \frac{m}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega \tau_k)^2}} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \phi_0 + \theta] \right\}.$$

Свернув это выражение, получим:

$$U_{\text{вых}}(t) = -K_{\text{max}} E_0 \left[ 1 + \frac{m}{\sqrt{1 + (\Omega \tau_k)^2}} \cos(\Omega t + \phi_0 - \theta) \right] \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Сопоставив это выражение с сигналом на входе, видим, что частота  $\omega$  и фаза  $\varphi$  несущего колебания АМ сигнала не изменилась при  $\omega = \omega_0$ .

В этом режиме инерционность колебательной цепи влияет только на огибающую:

а) Глубина модуляции на выходе  $m_{\text{вых}} = \frac{m}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau_k^2}}$  меньше, чем на входе –

это эффект демодуляции. Найдем коэффициент демодуляции  $D$ .

$$\text{Т.к. } \tau_k = \frac{2Q_{\text{экв}}}{\omega_0}, \text{ то } D = \frac{m_{\text{вых}}}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{2\Omega Q_{\text{экв}}}{\omega_0} \right)^2}}.$$

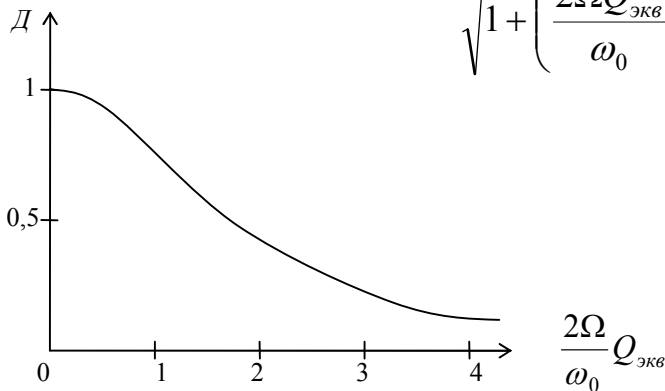


Рис. 10.44

б) Огибающая амплитуд на выходе отстает по фазе от огибающей входного колебания на угол  $\theta = \text{arctg} \Omega \tau_k = \text{arctg} \frac{2\Omega Q_{\text{экв}}}{\omega_0}$ .

Оба эти фактора обусловлены тем, что инерционность колебательной цепи снижает скорость изменения огибающей колебания. При этом, однако, форма гармонической огибающей остается неизменной.

Чем выше частота огибающей, тем сильнее ослабляются амплитуды боковых частот. Следовательно, если имеем сложное колебание, то будут линейные



искажения, связанные с неодинаковым ослаблением модуляции на различных частотах.

в) Имеет место задержка сообщения. Задержка определяется наклоном ФЧХ (рис. 10.42)

$$t_{\text{зад}} = \left| \frac{d\varphi}{d\Omega} \right| \quad t_{\text{зад}} \Big|_{\Omega=0} = \tau_k.$$

### 10.6.2. Нелинейные искажения в резонансном усилителе (слабо нелинейный режим)

Известно, что на выходе нелинейного элемента имеет место нелинейная функция  $i=f(U)$ . Разлагая ее в ряд Тейлора получим:

$$i(U) = f(U_0 + \Delta U) = f(U_0) + f'(U_0)\Delta U + \frac{1}{2}f''(U_0)\Delta U^2 + \frac{1}{6}f'''(U_0)\Delta U^3 + \dots$$

Пусть:  $\Delta U = U_C \cos \omega t$ , где:  $U_0$  – положение начальной рабочей точки,  $U_C$  – амплитуда сигнала,  $\omega$  – несущая угловая частота.

Будем считать, что колебательный контур высокочастотный, т.е. выделяет только частоту напряжения на частотах в области  $\omega = \omega_0$  и не выделяет комбинационные частоты и высшие гармоники. Тогда переменную составляющую тока первой гармоники дадут второй и четвертый член ряда, т.к.

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x).$$

$$i_1 = \left( S U_C + \frac{1}{8} S'' U_C^3 \right) \cos \omega_0 t, \text{ где } S = f'(U_0), \quad S'' = f'''(U_0).$$

Далее положим:  $U_C = U_{C_0} (1 + m \cos \Omega t)$ , тогда

$$U_C^3 = U_{C_0}^3 (1 + 3m \cos \Omega t + 3m^2 \cos^2 \Omega t + m^3 \cos^3 \Omega t).$$

Последнее выражение содержит вторую и третью гармоники модулирующей частоты  $\Omega$  с амплитудами

$$I_{1\Omega} = S U_{C_0} m; \quad I_{2\Omega} = \frac{1}{8} S'' U_{C_0}^3 \cdot \frac{3}{2} m^2; \quad I_{3\Omega} = \frac{1}{8} S'' U_{C_0}^3 \cdot \frac{1}{4} m^3.$$

Т.е. имеют место нелинейные искажения огибающей полезного сигнала. Из этих выражений видно, что искажения будут тем меньше, чем меньше амплитуда несущего колебания. Пренебрегая третьей гармоникой модулирующего колебания по сравнению со второй и считая первую гармонику приблизительно равной  $I_{1\Omega} \approx S U_{C_0} m$ , найдем коэффициент гармоник модулирующего колебания:

$$K = \frac{\sqrt{I_{2\Omega}^2 + I_{3\Omega}^2 + \dots}}{I_{1\Omega}} \approx \frac{I_{2\Omega}}{I_{1\Omega}} = \frac{3 S'' U_{C_0}^3 m^2}{16 S U_{C_0} m} = \frac{3 S''}{16 S} m U_{C_0}^2. \quad (10.34)$$

Отсюда видно, что надо не только уменьшить  $U_{C_0}$ , но и пытаться работать на линейном или квадратичном участках.



### 10.7. Параметрическое усиление сигнала

1. Пусть емкости  $C$  (рис. 10.45 – а) сообщен заряд  $q$  и, стало быть, в ее электрическом поле запасена энергия  $W_C = \frac{CU_C^2}{2}$ , где  $U_C = \frac{q}{C}$ . Считая заряд неизменным, а ёмкость параметрической, найдем производную  $\frac{dW_C}{dC}$ . Т.к.  $W_C = \frac{q^2}{2C}$ , то  $\frac{dW_C}{dC} = -\frac{q^2}{2C^2} = -\frac{W_C}{C}$ . Откуда  $\frac{dW_C}{W_C} = -\frac{dC}{C}$ .

Это равенство приблизительно справедливо и для малых разностей

$$\frac{\Delta C}{C} \approx -\frac{\Delta W_C}{W_C}. \quad (10.35)$$

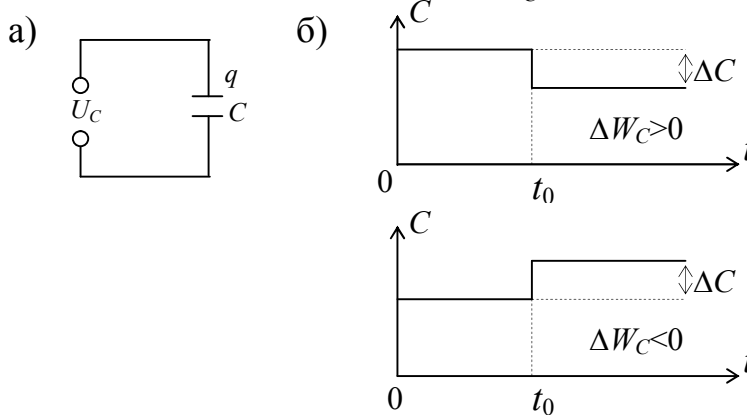


Рис. 10.45

Итак, если при заданном заряде в некоторый момент  $t=t_0$  происходит изменение емкости на величину  $\Delta C$ , это влечет изменение запасенной в электрическом поле энергии (см. рис. 10.45 – б). С уменьшением емкости ( $\frac{\Delta C}{C} < 0$ ) происходит увеличение запасенной энергии, т.к. для уменьшения емкости (например, путем раздвигания пластин конденсатора) необходимо провести работу против сил электрического поля. Она идет на повышение энергии системы ( $\Delta W_C > 0$ ).

Если же  $\frac{\Delta C}{C} > 0$ , т.е. с увеличением емкости работу совершают силы электрического поля и энергия системы уменьшается ( $\Delta W_C < 0$ ).

2. Положим теперь, что емкостной параметрический элемент включен последовательно с сопротивлением  $R$  в цепь, питаемую гармоническим током  $i = I \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

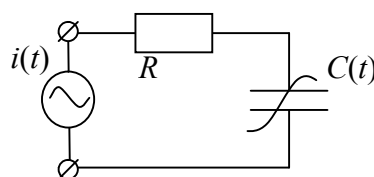


Рис. 10.46



В этом случае заряд является функцией времени  $q = \int I \cos(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{I}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi) + q_0; q_0=0$ .

Пусть емкость  $C$  уменьшается скачкообразно, так что уменьшение ее происходит всякий раз, когда заряд  $q$  проходит через свои амплитудные значения, а увеличение - в те моменты, когда  $q=0$ .

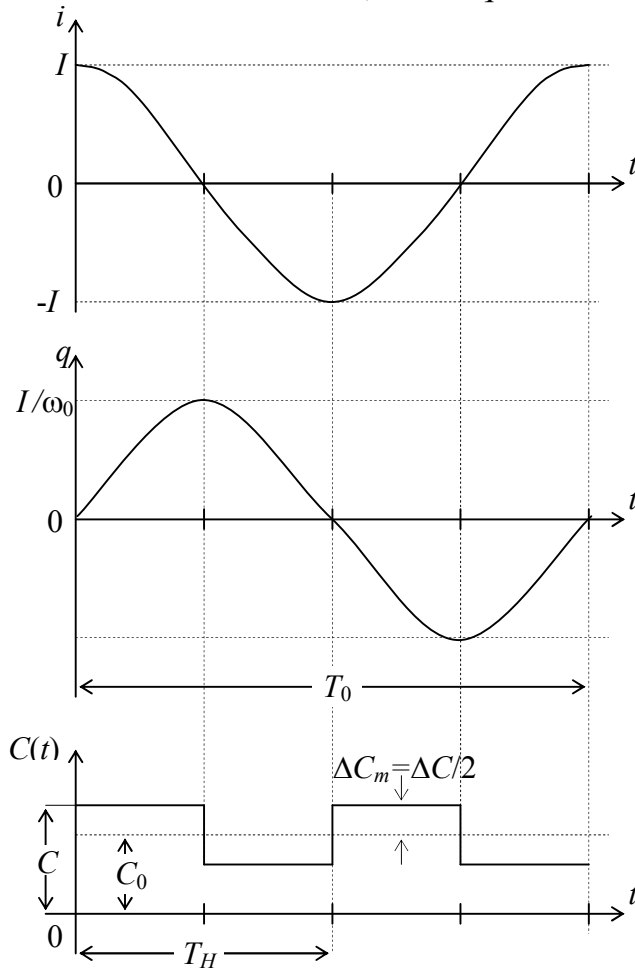


Рис.10.47

Из рис. 10.47 видно, что для такого режима необходимо, во-первых, чтобы период изменения емкости был равен

$$T_H = \frac{T_0}{2}, \quad (10.36)$$

во-вторых, начальная фаза тока должна иметь совершенно определенную величину (в нашем случае  $\varphi=0$ ).

Способ получения периодически меняющейся емкости поясняется схемой рис. 10.46 – а. К нелинейной емкости подводится управляющее напряжение накачки  $e_H(t)$ . Фильтр  $\Phi_1$  преграждает путь току накачки частоты  $\omega_H$  в цепи источника сигнала, а фильтр  $\Phi_2$  – току  $i(t)$  частоты сигнала  $\omega_0$  в цепь накачки.



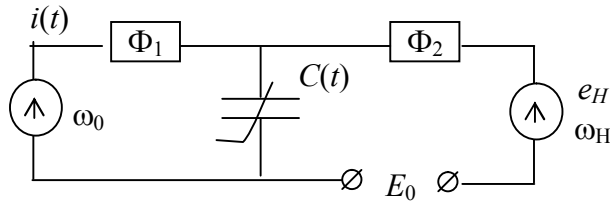


Рис. 10.47 - а

Уменьшение емкости, происходящее в момент наибольшего значения заряда  $q_{\max} = \frac{I}{\omega_0}$ , сопровождается добавлением в систему энергии

$$\Delta W_C = W_C \left| \frac{\Delta C}{C} \right|. \quad (10.37)$$

Увеличение емкости не сопровождается изменением энергии, т.к. оно происходит в тот момент, когда заряд  $q$ , а значит и запасенная энергия, равны нулю, т.к.

$$W_C = \frac{q^2}{2C} = 0.$$

Так как уменьшение емкости происходит дважды в течение периода  $T_0$ , за период  $T_0$  в систему добавляется энергия

$$W_{CT} = 2|\Delta W_C| = 2W_C \left| \frac{\Delta C}{C} \right|.$$

Имея в виду, что  $W_C = \frac{q_{\max}^2}{2C}$ ;  $X_C = \frac{1}{\omega_0 C}$ ;  $q_{\max} = \frac{I}{\omega_0}$ , получим

$$W_{CT} = \frac{I^2 X_C}{\omega_0} \left| \frac{\Delta C}{C} \right|. \quad (10.38)$$

Таким образом, поступающая в систему средняя за период мощность

$$P_- = \frac{W_{CT}}{T_0} = \frac{W_{CT}}{2\pi} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} I^2 X_C \left| \frac{\Delta C}{C} \right| \quad (10.39)$$

добавляется в цепь источником, производящим вариацию емкости - источником накачки.

Явления, происходящие в системе, удобно представить так, как-будто в цепь вносится отрицательное сопротивление  $R_{вн} = -R$ .

Мощность, отдаваемая этим сопротивлением,

$$P_- = \frac{1}{2} I^2 R_{вн}. \quad (10.40)$$

Из сопоставления выражений (10.40) и (10.39) следует

$$R_{вн} = \frac{1}{\pi} X_C \left| \frac{\Delta C}{C} \right| \quad (10.41)$$



Воспользуемся понятием коэффициента вариации емкости, который равен

$$(см. рис. 10.47) \quad m = \frac{\Delta C_m}{C_0} = \frac{\frac{\Delta C}{2}}{C - \frac{\Delta C}{2}} \approx \frac{\Delta C}{2C_0}.$$

$$\text{Следовательно } R_{вн} = \frac{2}{\pi} m X_C. \quad (10.42)$$

В результате полное (эквивалентное) сопротивление  $R_{эkv} = R - R_{вн} = R - \frac{2}{\pi} m X_C$ . Т.е. энергия, теряемая в цепи, частично компенсируется энергией, "накачиваемой" в систему источником, производящим изменение емкости.

Коэффициент усиления параметрического усилителя  $K = \frac{|\dot{U}_{вх}|}{|\dot{U}_{вх}|}$  можно считать равным эквивалентной добротности

$$K = Q_{эkv} = \frac{X_C}{R_{эkv}} = \frac{X_C}{R - \frac{2}{\pi} m X_C} = \frac{Q}{1 - \frac{2m}{\pi} Q}, \text{ где } Q = \frac{X_C}{R}.$$

Итак,

$$K = \frac{Q}{1 - \frac{2m}{\pi} Q}. \quad (10.43)$$

## 11. Автогенераторы гармонических колебаний

Одной из задач радиоэлектроники является генерация колебаний. Устройство, генерирующее колебание без внешнего воздействия, называется автогенератором. Рассмотрим принципы работы автогенератора гармонических колебаний.

### 11.1. Обобщенная схема автогенератора. Баланс амплитуд и баланс фаз в стационарном режиме автогенератора

Электрическая цепь, в которой сохраняются незатухающие электрические колебания без всякого периодического воздействия извне, образует автоколебательную систему.

Нами уже рассмотрены основные блоки, требующиеся для функционирования автогенераторов.

Независимо от схемы и назначения автогенератор должен иметь источник питания, усилитель и цепь обратной связи. Из рассмотренных в разделах 10 материалов, видно, что для генерации обратная связь должна быть положительной.



Из общих соображений ясно, что

а) необходим резонансный усилитель; т.к. мы хотим, чтобы генерировалось синусоидальное колебание, следовательно, нагрузкой усилителя должен быть частотно-избирательный четырехполосник;

б) обратная связь должна быть положительной, с тем, чтобы выполнялось условие самовозбуждения;

в) усилитель должен быть не только резонансным, но и нелинейным, иначе при выполнении условий самовозбуждения амплитуда колебаний будет нарастать безгранично при положительной ОС.

Итак, любой автогенератор можно представить в виде обобщенной схемы рис 11.1.

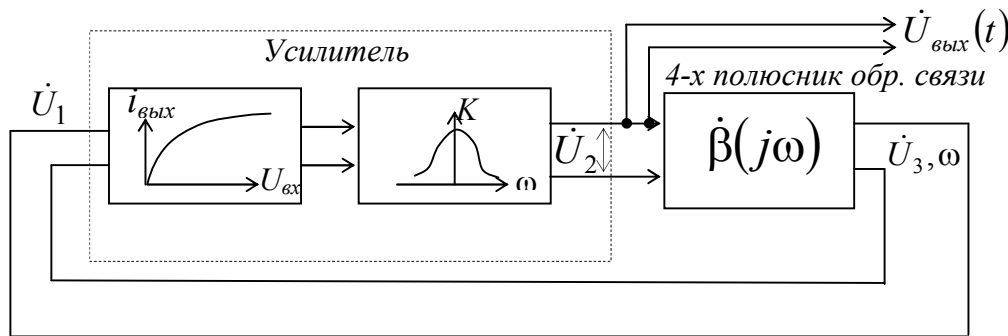


Рис. 11.1

На этой схеме автогенератор изображен в виде сочетания трех четырехполосников: одного нелинейного и безынерционного (транзистор, электронная лампа, туннельный диод и т.д.); линейного частотно-избирательного и цепи обратной связи. Рассмотрим условие стационарного режима работы автогенератора методом комплексных амплитуд.

В общем случае усиление нелинейного резонансного усилителя зависит как от частоты  $\omega_0$  (из-за избирательности нагрузки), так и от амплитуды входного воздействия  $\dot{U}_1$  (из-за нелинейности усилительного элемента), и от положения начальной рабочей точки (крутизна  $S_0$ ).

Коэффициент усиления нелинейного усилителя обозначим  $\dot{K}(j\omega_0, U_1)$ . Очевидно, что

$$\dot{K}(j\omega, U_1) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}. \quad (11.1)$$

При фиксированной частоте  $\omega_0$  и положении начальной рабочей точки  $\dot{K}$  является функцией только амплитуды  $U_1$ .

Коэффициент передачи линейного четырехполосника обратной связи  $\dot{\beta}(j\omega) = \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_2}$ , но  $\dot{U}_3 = \dot{U}_1$ , следовательно,

$$\dot{\beta}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \quad (11.1')$$



Из сравнения (11.1) и (11.1') видно, что в стационарном режиме автогенератора (когда только и можно пользоваться методом комплексных амплитуд)  $\dot{K}_0$  и  $\dot{\beta}$  являются взаимно обратными величинами  $\dot{\beta}(j\omega) = \frac{1}{\dot{K}(j\omega, U_1)}$ .

Представим комплексные функции  $\dot{K}(j\omega_0, U_1)$ ,  $\dot{\beta}(j\omega_0)$  в следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{K}(j\omega_0) = K(\omega_0, U_1)e^{j\varphi_K(\omega_0)}, \\ \dot{\beta}(j\omega_0) = \beta(\omega_0)e^{j\varphi_\beta(\omega_0)}. \end{cases}$$

Учтем, что  $\dot{K}(j\omega, U_1) \cdot \dot{\beta}(j\omega) = 1$ , следовательно

$$\left| \dot{K}(\omega_0, U_1) \right| \cdot \left| \dot{\beta}(\omega_0) \right| = 1 \quad - \text{условие стационарного режима} \quad (11.2)$$

$$\left\{ \varphi_K(\omega_0) + \varphi_\beta(\omega_0) = 2\pi n \quad (11.3) \right.$$

а) Условие (11.2) - баланс амплитуд. Из него следует, что в стационарном режиме полное усиление на генерируемой частоте  $\omega_0$  при обходе кольца обратной связи равно единице.

Т.к. коэффициент передачи линейного четырехполюсника ОС  $\dot{\beta}(\omega_0)$  не зависит от амплитуды колебаний, то выражение (11.2) можно использовать для определения установившейся амплитуды колебаний при заданном  $\beta(\omega_0)$ .

Именно, когда  $K$ , уменьшаясь с ростом амплитуды (из-за нелинейности ВАХ усилительного элемента), достигает значения  $K = \frac{1}{\beta}$ , дальнейший рост амплитуды, как указывалось раньше, прекращается. Из рис. 11.2 видно, что стационарная амплитуда  $U_{1 \text{ стаци}}$  определяется как абсцисса точки пересечения графика  $K$  с горизонталью, проведенной на уровне  $K = \frac{1}{\beta}$ .

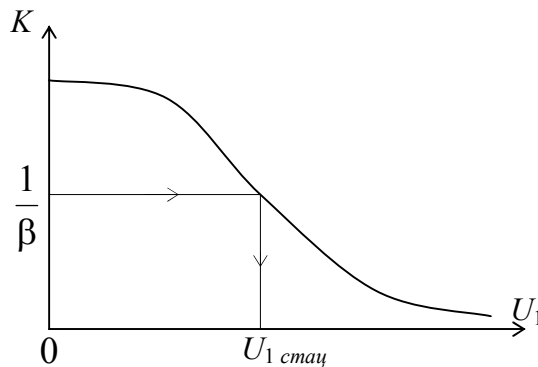


Рис. 11.2

Кроме того, выражение (11.2) можно использовать для определения коэффициента ОС, требуемого для поддержания определенной амплитуды  $U_{1 \text{ стаци}}$  при заданной функции  $K(U_1)$ .

б) Условие (11.3) - баланс фаз. Т.е. полный набег фаз должен быть кратен  $2\pi$ , что обуславливает положительную обратную связь.



## 11.2. Самовозбуждение простейшего автогенератора (линейное приближение)

Исследование процессов самовозбуждения проведем на примере автогенератора с трансформаторной связью, использующем полевой транзистор с управляемым затвором  $p$ -типа, колебательную систему - LCR контур и элемент обратной связи  $L_{св}$  (рис.11.3).

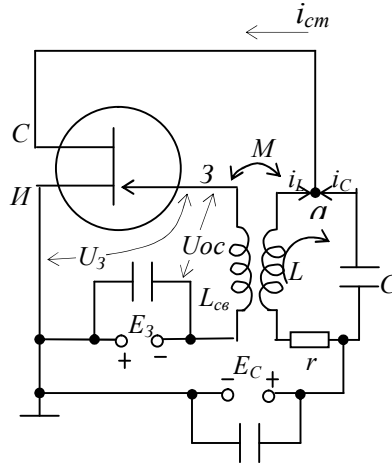


Рис. 11.3

Запишем систему уравнений Кирхгофа.

$$\begin{cases} i_{сток} = i_L + i_C - \text{для узла а,} \\ L \frac{di_L}{dt} + ri_L - \frac{1}{C} \int i_C dt = 0 - \text{цепь колебательного контура,} \\ U_3 = E_3 + U_{OC} = E_3 \pm M \frac{di_L}{dt} - \text{цепь затвора.} \end{cases}$$

Переменная составляющая напряжения на затворе  $U_{OC} = U_{\sim} = \pm M \frac{di_L}{dt}$ .

Продифференцируем второе уравнение системы дважды по времени.

$$L \frac{d^3 i_L}{dt^3} + r \frac{d^2 i_L}{dt^2} - \frac{1}{C} \frac{di_C}{dt} = 0.$$

Т.к.  $i_C = i_{сток} - i_L$ , имеем: 
$$\frac{d^3 i_L}{dt^3} + \frac{r}{L} \frac{d^2 i_L}{dt^2} - \frac{1}{LC} \left( \frac{di_{сток}}{dt} - \frac{di_L}{dt} \right) = 0.$$

Будем считать, что катушка  $L_{св}$  включена встречно, т.е.  $U_{OC} = M \frac{di_L}{dt}$ . Отсюда

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{M} U_{OC}; \quad \frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{1}{M} \frac{dU_{OC}}{dt}; \quad \frac{d^3 i_L}{dt^3} = \frac{1}{M} \frac{d^2 U_{OC}}{dt^2}.$$

Тогда имеем 
$$\frac{d^2 U_{OC}}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{dU_{OC}}{dt} - \frac{M}{LC} \frac{di_{сток}}{dt} + \frac{1}{LC} U_{OC} = 0. \quad (11.4)$$



Предположение: будем считать управляющее напряжение на затворе столь малым, что полевой транзистор может быть заменен управляемым источником тока, т.е.  $i_{cmok} = i_0 + S_0 U_{oc}$ ,  $S_0$  - крутизна в начальной рабочей точке.

Тогда:  $\frac{d^2 U_{oc}}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{dU_{oc}}{dt} - \frac{MS_0}{LC} \frac{dU_{oc}}{dt} + \frac{1}{LC} U_{oc} = 0$ . Отсюда, обозначив  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ , имеем

$$\frac{d^2 U_{oc}}{dt^2} + \frac{1}{L} \left( r - \frac{MS_0}{C} \right) \frac{dU_{oc}}{dt} + \omega_0^2 U_{oc} = 0 \quad (11.4')$$

Видно, что множитель  $r - \frac{MS_0}{C} = r_1$ , имеет размерность сопротивления. Здесь  $r$  - это собственное сопротивление потерь контура. Второе слагаемое имеет отрицательный знак и, следовательно, является отрицательным сопротивлением, вносимым полевым транзистором в колебательный контур и компенсирующим потери в контуре.

Определим условие самовозбуждения, полагая, что рассматриваемая система в окрестности начальной рабочей точки линейна и процессы в ней описываются линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 U_{oc}}{dt^2} + 2\alpha \frac{dU_{oc}}{dt} + \omega_0^2 U_{oc} = 0, \quad (11.5)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{2L} \left( r - \frac{MS_0}{C} \right). \quad (11.5')$$

Общее решение этого дифференциального уравнения

$$U_{oc}(t) = U_K(0) e^{-\alpha t} \cos(\omega_{cв} t + \varphi), \quad (11.6)$$

где  $U_K(0)$  и фаза  $\varphi$  - постоянные величины, зависящие от начальных условий,

$$\omega_{cв} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} \text{ - частота свободных колебаний,} \quad (11.6')$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}; \omega_0^2 \gg \alpha^2.$$

Характер колебания зависит от знака  $\alpha$ , если  $\alpha > 0$ , то колебание затухает.

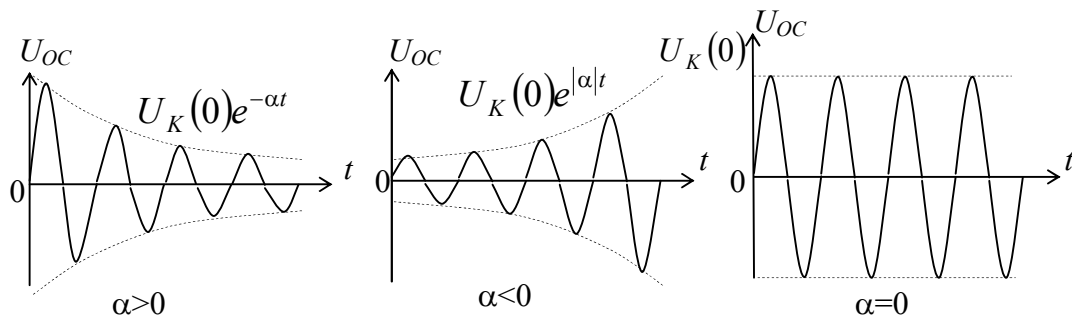


Рис. 11.4

Из (11.5') и (11.6) следует условие самовозбуждения



$$\frac{MS_0}{C} > r. \quad (11.7)$$

Из (11.7), учитывая, что  $M/L$  равно отношению напряжения обратной связи к напряжению на контуре, т.е.  $M/L = \beta$ , можно, умножив (11.7) на  $\frac{C}{LS_0}$ , записать

$$\text{условие самовозбуждения } \beta > \frac{1}{S_0 R_{\text{экв}}}, \quad (11.7')$$

где  $R_{\text{экв}} = \frac{L}{Cr}$  - входное сопротивление контура при резонансе.

Это неравенство является основным условием самовозбуждения автогенератора.

Отметим, что  $S_0 \cdot R_{\text{экв}} = K_0$ , следовательно, получим, как и в (10.7), условие самовозбуждения  $\beta > \frac{1}{K_0}$ , или  $K_0 \cdot \beta > 1$ .

### 11.3. Стационарный режим автогенератора (квазилинейное приближение). Понятие "средняя крутизна".

В предыдущем разделе фактически была рассмотрена линейная теория автогенератора, в основе которой лежит замена исходного нелинейного дифференциального уравнения соответствующим линейным уравнением. Эта теория позволила установить условие самовозбуждения автогенератора. Однако, решение линейного дифференциального уравнения не отражает в достаточной степени сущность процессов, протекающих в автогенераторе. Линейная теория, например, не позволяет определить амплитуду колебаний в стационарном состоянии.

Стационарные амплитуды напряжений и токов, очевидно, можно найти лишь при условии учета нелинейности характеристики активного элемента, ибо эта нелинейность, как уже говорилось, и является в конечном счете причиной установления автоколебаний в генераторе. В самом деле, при увеличении "размаха" колебаний усилительные способности активного элемента ухудшаются и нарастание колебаний, в конце концов, прекращается.

В установившемся состоянии ток активного элемента отличается от синусоидального. Так, если вольт-амперная характеристика (ВАХ) активного элемента  $i_{\text{сток}} = f(U_{\text{OC}})$ , запишем дифференциальное уравнение (11.4) с учетом

того, что  $\frac{di_{\text{сток}}}{dt} = \frac{df}{dU_{\text{OC}}} \cdot \frac{dU_{\text{OC}}}{dt}$ , тогда

$$\frac{d^2 U_{\text{OC}}}{dt^2} + \frac{1}{L} \left( r - \frac{M}{C} \cdot \frac{df}{dU_{\text{OC}}} \right) \cdot \frac{dU_{\text{OC}}}{dt} + \omega_0^2 U_{\text{OC}} = 0. \quad (11.8)$$

Способов точного решения таких уравнений при любой функции  $f(U_{\text{OC}})$  не существует.



Следует принять во внимание, что автогенератор содержит высокочастотный колебательный контур. Поэтому, несмотря на присутствие нелинейного элемента, напряжение на контуре должно мало отличаться от гармонического колебания с частотой  $\omega_0$ .

Будем искать приближенное решение уравнения (11.8) в виде  $U_{OC}(t) = V(t)\cos\omega_0 t$ , предполагая амплитуду  $V(t)$  медленной функцией времени в том смысле, что

$$\left| \frac{dV}{dt} \right| \ll \omega_0 |V|, \quad (11.9)$$

На этом основании производная  $\frac{dU_{OC}}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \cos\omega_0 t - \omega_0 V \cdot \sin\omega_0 t$  принимает вид  $\frac{dU_{OC}}{dt} \approx -\omega_0 V \cdot \sin\omega_0 t$ .

Таким же образом вторая производная

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_{OC}}{dt^2} &= \frac{d^2 V}{dt^2} \cdot \cos\omega_0 t - 2\omega_0 \frac{dV}{dt} \cdot \sin\omega_0 t - \omega_0^2 V \cdot \cos\omega_0 t \approx \\ &\approx -2\omega_0 \frac{dV}{dt} \cdot \sin\omega_0 t - \omega_0^2 V \cdot \cos\omega_0 t \end{aligned}$$

Подставив выражения  $U_{OC}$ ,  $\frac{dU_{OC}}{dt}$ ,  $\frac{d^2 U_{OC}}{dt^2}$ , получим из уравнения (11.8) так называемое укороченное уравнение

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2L} \left( r - \frac{M}{C} \cdot \frac{df}{dU_{OC}} \right) V = 0, \quad (11.10)$$

приблизительно описывающее процессы в автогенераторе с высокочастотным колебательным контуром.

Производная  $\frac{df}{dU_{OC}}$  является дифференциальной проводимостью нелинейного элемента.

Ток  $i_{сток}(t)$  можно представить периодической функцией времени  $i_{сток} = f(U_{OC}) = I_0 + I_1 \cos\omega_0 t + I_2 \cos 2\omega_0 t + \dots$

Поскольку выходное напряжение лишь в малой степени отличается от гармонического с частотой  $\omega_0$ , отбросив все высшие гармоники тока (т.к. они не будут влиять на выходное напряжение), получим приближенно  $i_{сток}(t) = f(U_{OC}) \approx I_0 + I_1 \cos\omega_0 t$ .

$$\text{В то же время } \frac{df}{dU_{OC}} = \frac{\frac{df}{dt}}{\frac{dU_{OC}}{dt}} = \frac{\frac{di_{сток}}{dt}}{\frac{dU_{OC}}{dt}} = \frac{-\omega_0 I_1 \sin\omega_0 t}{-\omega_0 V \sin\omega_0 t} = \frac{I_1}{V}.$$



Назовем коэффициент пропорциональности между амплитудой первой гармоники тока и амплитудой напряжения на управляющем электроде средней крутизной

$$S_1 = \frac{I_1(V)}{V}. \quad (11.11)$$

Это основа квазилинейной теории автогенератора Ю.Б. Кобзарева. Согласно этой теории, средняя за период колебания крутизна считается постоянной (т.е. система как бы линейна).

Введя среднюю крутизну  $S_1(V)$  в уравнение (11.10), запишем это укороченное уравнение в виде:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2L} \left( r - \frac{MS_1(V)}{C} \right) V = 0, \quad (11.12)$$

Амплитуда стационарна, т.е.  $\frac{dV}{dt} = 0$  ( $V = \text{const}$ ), в том случае, когда  $r - \frac{MS_1(V)}{C} = 0$ . Итак,  $S_1(V) = \frac{rC}{M}$  – условие стационарности амплитуды.

#### 11.4. Виды возбуждения автогенератора

В зависимости от положения начальной рабочей точки различают режим мягкого и жесткого возбуждения автоколебаний.

- Мягкое возбуждение

Покажем этот процесс на примере транзисторного каскада с использованием прямой проходной характеристики  $i_K = f(U_{БЭ})$ .

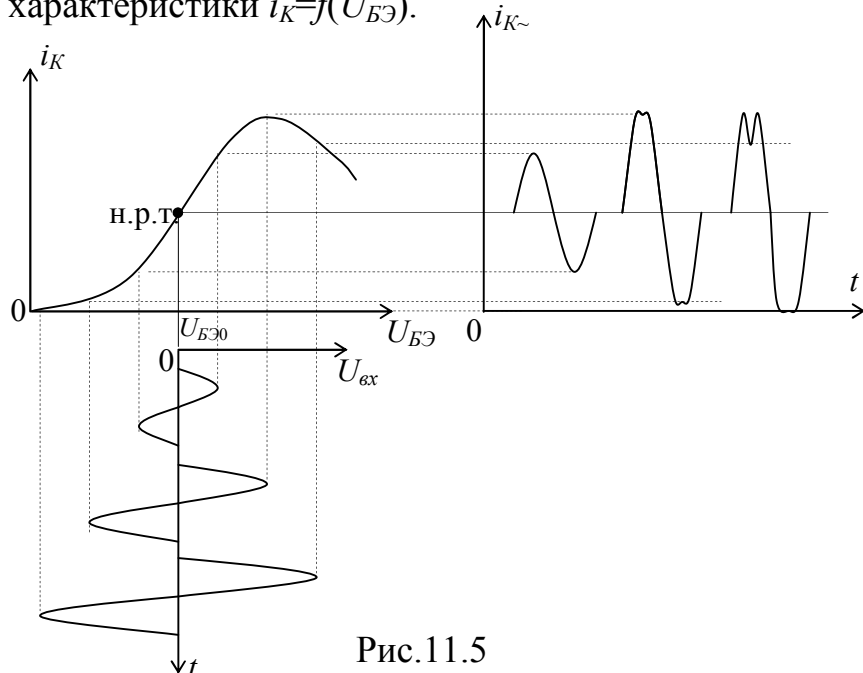


Рис.11.5

Здесь начальная рабочая точка (н.р.т.) выбрана в области наибольшей крутизны  $S_0$  проходной характеристики. Как видно из рис. 11.5 и рис. 11.6, с увеличением амплитуды  $U_{БЭ}$  средняя крутизна  $S_1$  монотонно уменьшается.



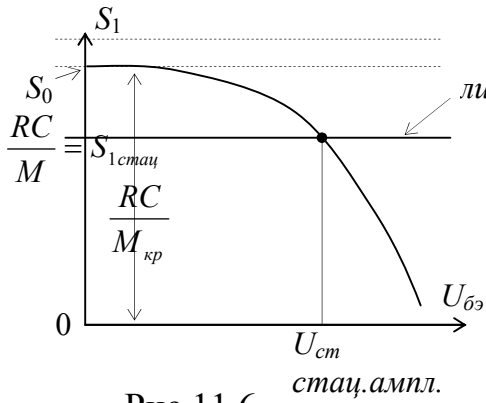
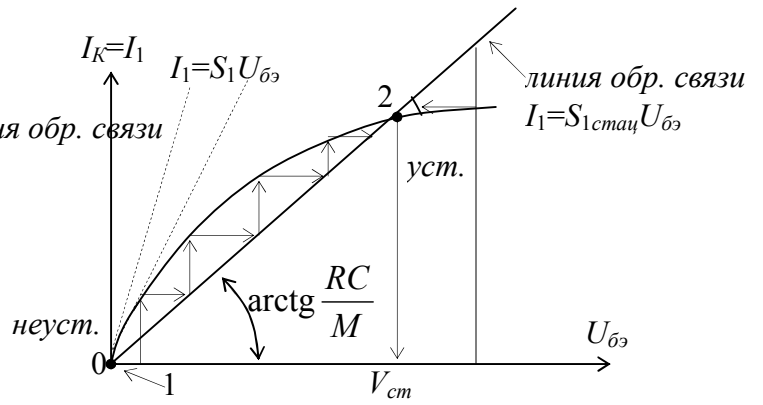


Рис.11.6



Колебательная хар-ка. Два состояния равновесия

Рис.11.7

Из выражения (11.11) видно, что среднюю крутизну можно определить из зависимости амплитуды первой гармоники тока от амплитуды входного воздействия в колебательном контуре  $I_k = f(V)$  – это колебательная характеристика автогенератора.

Вид этой функции существенно зависит от положения начальной рабочей точки. На рис. 11.7 приведена колебательная характеристика при условии, что НРТ находится на середине линейного участка прямой проходной характеристики. Это мягкий режим возбуждения. На характеристике  $I_k = f(U_{бэ})$  рис. 11.7 два состояния равновесия (точки 1 и 2): 1 – неустойчивое, 2 – устойчивое.

При мягком режиме возбуждения линия обратной связи  $\frac{rC}{M} = S_1$  опускается вниз с увеличением степени обратной связи (здесь взаимоиנדукция)  $M$  (рис. 11.6). Пока линия  $\frac{rC}{M}$  не пересекает функцию  $S_1 = S_1(U_{бэ})$  имеет место устойчивое состояние покоя с нулевой амплитудой колебаний. Если коэффициент  $M$

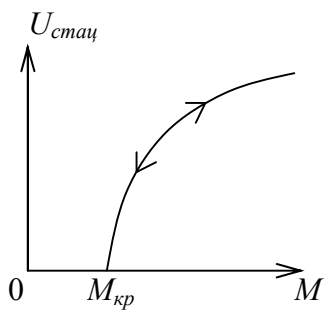


Рис.11.8

увеличивается, то при  $M_{кр} = \frac{rC}{S_1(0)} = \frac{rC}{S_0}$  автогенератор возбуждается при сколь угодно малой амплитуде, т.к.  $S_0$  больше любого значения  $S_1$ . Дальнейший рост  $M$  приведет к плавному увеличению амплитуды генерируемых автоколебаний (см. рис. 11.8). Причем для данного  $M$  имеет место единственная амплитуда стационарных колебаний.

- Жесткое возбуждение

Если же начальная рабочая точка смещена влево (рис. 11.9) на нелинейный участок ВАХ, то средняя крутизна имеет экстремум (НРТ в области малой крутизны) - жесткий режим самовозбуждения.



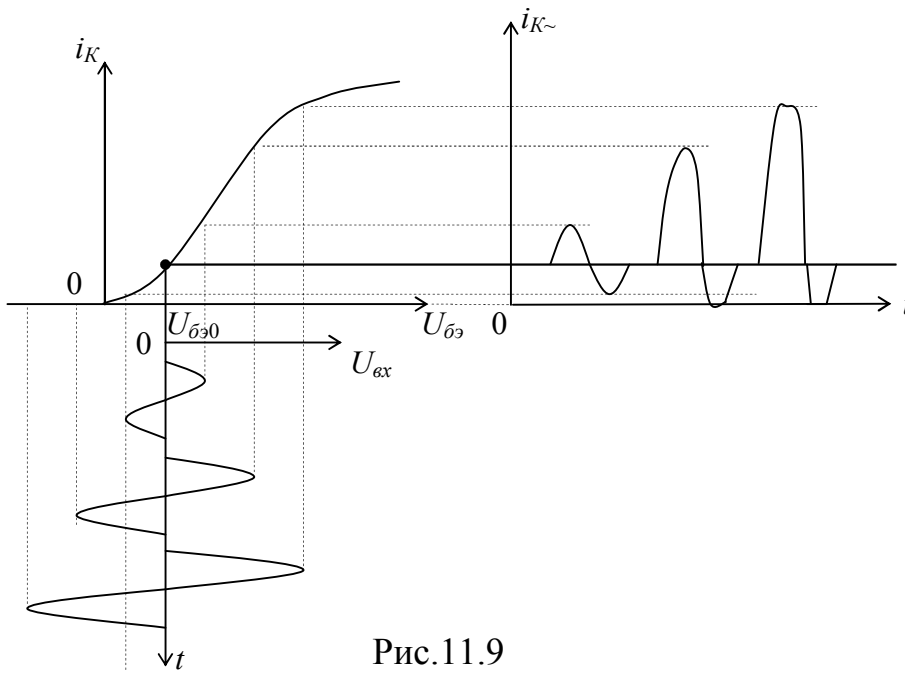


Рис.11.9

Колебательные характеристики в этом случае имеют точку перегиба (рис. 11.10) и три точки равновесия: 1,3 -устойчивое, 2 - неустойчивое.

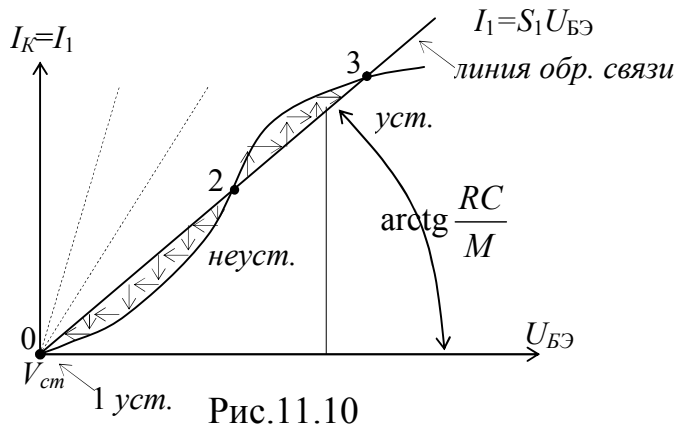


Рис.11.10

И в этом режиме покажем процесс самовозбуждения и определение стационарной амплитуды с использованием понятия средней крутизны.

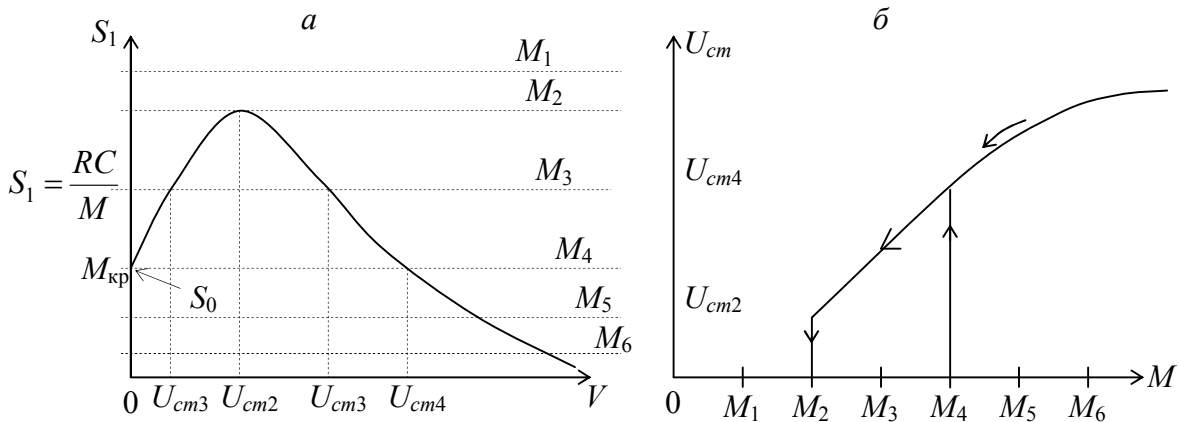


Рис.11.11

При  $M=M_1$  колебание будет отсутствовать, т.к. линия обратной связи не пересекает графика средней крутизны (см. рис. 11.11-а).



При  $M=M_2$  линия обратной связи касается графика средней крутизны, но колебание не возникает т.к. в этой точке средняя крутизна  $S_1$  больше чем крутизна  $S_0$  в начальной рабочей точке ( $S_0 < S_1$ ). Существующим малым флуктуациям соответствует крутизна  $S_0$  в рабочей точке характеристики, а ее значение недостаточно для обеспечения баланса амплитуд.

Колебания возникнут лишь при  $M=M_4$ , т.е. в тот момент, когда обратная связь становится достаточной для обеспечения баланса амплитуд даже при малой крутизне  $S_0$ . При  $M=M_4$  малые флуктуационные колебания начинают расти (см. рис. 11.11-б). Вначале рост амплитуды колебаний вызывает увеличение средней крутизны  $S_1$  характеристики, что приводит к увеличению усиления. С увеличением усиления возрастает амплитуда колебаний, а следовательно, и средняя крутизна. При дальнейшем росте амплитуды средняя крутизна уменьшается и амплитуда в соответствии с уравнением стационарности

$$M_4 = \frac{rC}{S_{1cm}}$$

принимает значение  $U_{cm4}$ .

Последующие увеличение коэффициента взаимной индукции  $M$  (от  $M_4$  до  $M_6$ ) вызывает плавное увеличение амплитуды колебаний (от  $U_{cm4}$  до  $U_{cm6}$  и далее).

При уменьшении  $M$ , начиная от больших  $M$  ( $M > M_4$ ), колебания будут существовать до тех пор, пока  $M$  не станет равной  $M_2$ . Это связано с тем, что при больших амплитудах  $S_1 > S_0$  и в промежутке между  $M_4$  и  $M_2$  существующие колебания обеспечивают необходимую среднюю крутизну характеристики и условия стационарности выполняются (здесь  $\frac{dS}{dV} < 0$ ).

При  $M < M_2$  колебания в системе исчезнут, т.к. в этот момент нарушится баланс амплитуд. Уменьшение амплитуды стимулирует уменьшение средней крутизны и, наоборот (здесь  $\frac{dS}{dV} > 0$ ).

Таким образом, при жестком режиме возбуждения зависимость  $U_{cm}(M)$  неоднозначна и носит петлеобразный характер, т.е. имеет место колебательный гистерезис.

Причем пересечение линии обратной связи с кривой средней крутизны в правой части, где  $\frac{dS}{dV} < 0$ , дает устойчивое значение стационарной амплитуды.

Другими словами, при запуске автогенератора напряжение на управляющем электроде должно как бы "перескочить" через интервал ( $0 \div U_{cm4}$ ), что, очевидно, возможно, если находится под воздействием внешнего возбуждающего напряжения.

## 11.5. КПД автогенератора и оптимизация режима запуска

Оценим графически динамику формы коллекторного тока автогенератора в зависимости от положения его начальной рабочей точки.



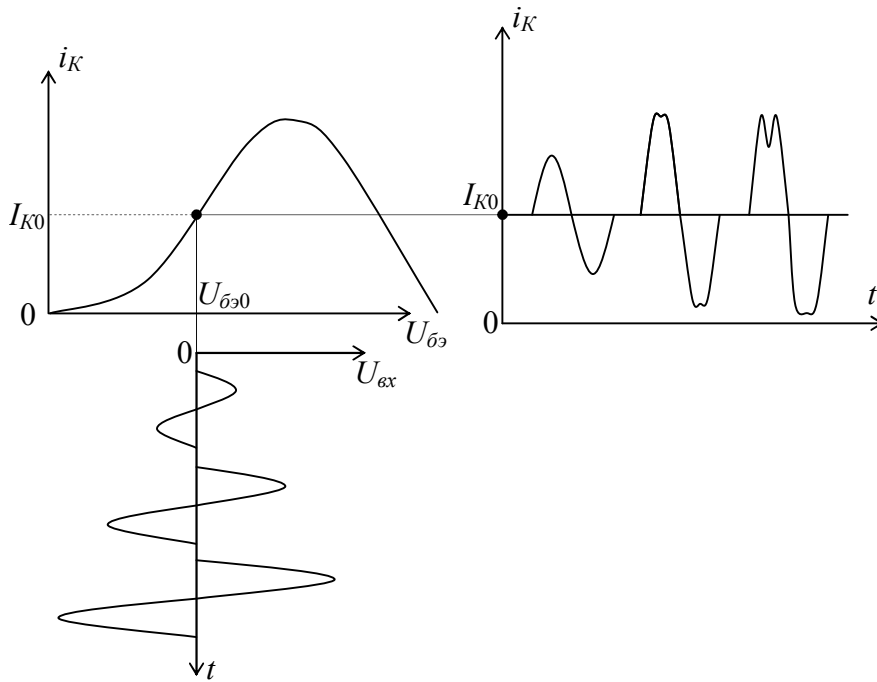


Рис. 11.12

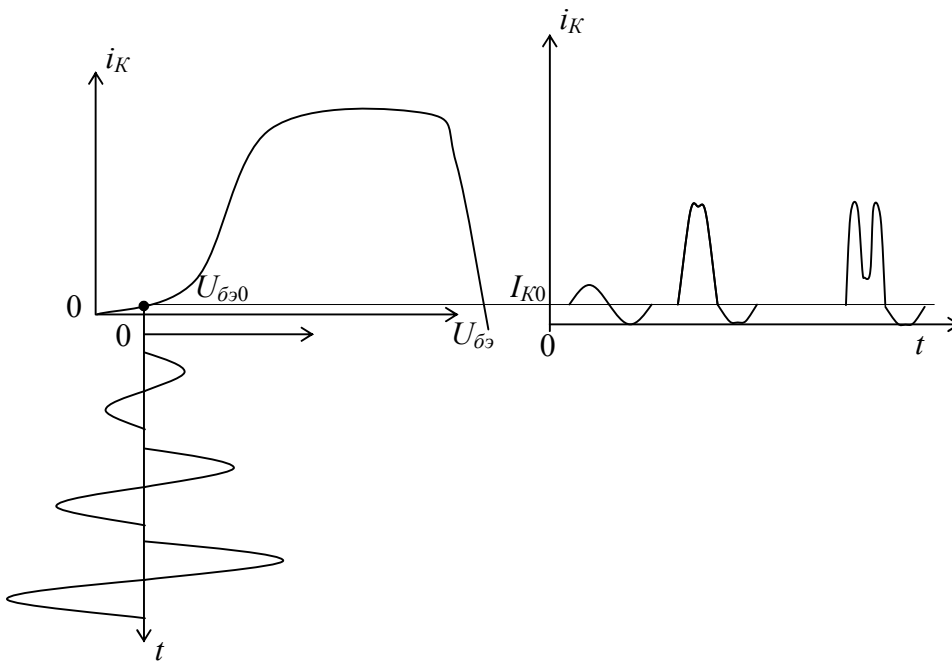


Рис. 11.13

Отметим, что ток коллектора может при больших входных воздействиях не только уменьшаться до нуля, но и менять свой знак (рис. 11.12 и 11.13). Как видно из этого графического построения, форма коллекторного тока как при мягком, так и при жестком режимах возбуждения может существенно отличаться от синусоидальной, из-за нелинейности активного элемента. Однако, на нагрузке в виде параллельного колебательного контура, вследствие его высокой избирательности выделяется синусоидальное напряжение, пропорциональное первой гармонике тока  $I_K$ .



По определению, КПД  $\eta = \frac{P_1}{P_0} \cdot 100\%$ , где  $P_1$  – мощность полезная,  $P_0$  –

потребляемая мощность. Как видно из построения, т.к. при мягком режиме возбуждения НРТ выбирается на участке максимальной крутизны, а при жестком - вблизи  $U_{\delta\delta} = 0$ , то  $I_{0.мяг} \gg I_{0.ж}$ ,  $I_{1.мяг} < I_{0.мяг}$ ,  $I_{1.ж} > I_{0.ж}$ . Отсюда следует, что  $\eta_{ж.р.} > \eta_{м.р.}$ .

Таким образом, достоинство жесткого режима возбуждения - высокий КПД. В то же время условия самовозбуждения в этом режиме очень тяжелые (скачкообразное возбуждение и срыв) и невозможно получить малые колебания. Достоинство мягкого режима возбуждения - плавное изменение амплитуды  $V$  при изменении коэффициента  $M$ .

Достоинства мягкого и жесткого режимов самовозбуждения можно объединить в схеме автогенератора, содержащей элемент автоматического смещения.

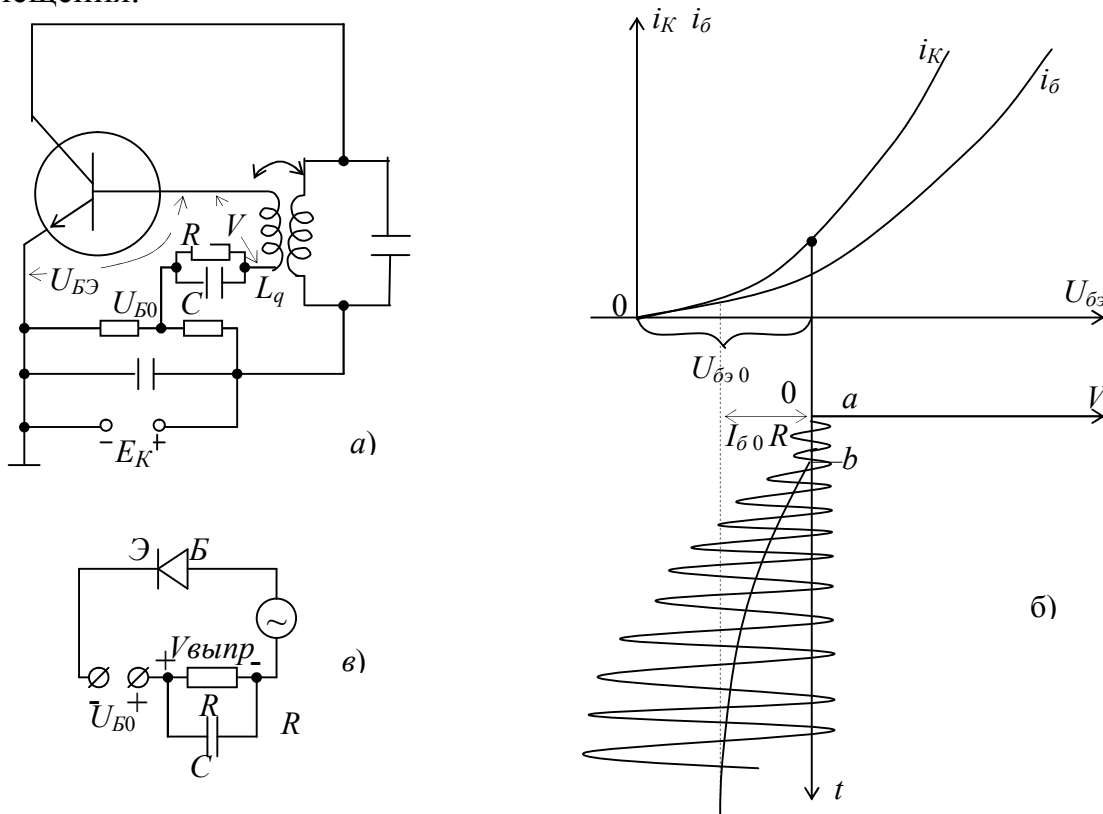


Рис. 11.14

В транзисторном автогенераторе с общим эмиттером (рис. 11.14–а) НРТ на ВАХ (рис. 11.14–б) в момент запуска расположена при положительном значении  $U_{\delta\delta 0}$  на середине линейного участка характеристики (чтобы был мягкий режим возбуждения). Поэтому на начальном этапе запуска нарастание амплитуды колебаний не сопровождается увеличением отрицательного напряжения смещения (участок а-б на рис. 11.14–б).

Рабочие токи сдвигаются влево лишь при заходе амплитуды колебания на нижний сгиб характеристики  $i_{\delta} = f(U_{\delta})$ , когда проявляется эффект выпрямления напряжения  $V(t)$  в переходе база-эмиттер.



Здесь при постоянной времени  $RC \gg T_0$  (превышающей период ВЧ колебания) выпрямленное напряжение  $V_{выпр}$  (рис. 11.14–в) растет пропорционально амплитуде напряжения ОС.

Таким образом, цепь  $RC$  автоматически обеспечивает изменение напряжения смещения, благодаря чему создается режим мягкого запуска и выгодный с энергетической точки зрения (отсечка коллекторного тока) стационарный режим.

## 12. Принципы получения модулированных колебаний

Изучая в разделах 1 и 2 различные виды радиосигналов, их свойства и, в частности, их спектральный состав, мы не интересовались, какими техническими средствами может быть достигнуто изменение (модуляция) параметров колебаний в соответствии с передаваемой информацией.

Теперь рассмотрим основные принципы осуществления модуляции, т.е. изменение радиочастотного колебания по закону управляющего сигнала.

При неискаженной амплитудной модуляции вид спектральной функции  $S_2(\omega - \omega_n)$  должен быть таким же, как и спектральная функция управляющего сигнала  $S_1(\Omega)$ .

Как видно, выходное напряжение должно содержать те частоты  $\omega_n \pm n\Omega$ , которых нет в составе подведенного напряжения, т.е. в системе должно осуществляться органическое преобразование частотных спектров, что не может быть выполнено в линейных цепях с постоянными параметрами.

Если пользоваться языком временного, а не спектрального метода, задачу амплитудной модуляции можно сформулировать несколько иначе.

Переменное напряжение  $U_c(t)$  можно рассматривать как изменение напряжения смещения, подведенного к управляющему входу, т.е.  $U_{упр}(t) = \Delta U_\Omega(t)$ .

Для неискаженной модуляции необходимо, чтобы изменение амплитуды выходного напряжения, имеющего частоту  $\omega_n$ , было пропорциональным напряжению сигнала  $\Delta U_{вых}(t) = k \Delta U_\Omega(t) = k U_{упр}$ .

Вновь приходим к выводу, что выполнение этого требования в линейной системе с постоянными параметрами невозможно. Действительно, к линейной цепи применим принцип суперпозиции. Поэтому отклик на каждое из двух воздействий ( $U_\Omega$  и  $U_n = U \cos \omega_n t$ ) независимы друг от друга, и изменение величины  $U_\Omega$  не может сказаться на величине выходного напряжения другого сигнала, имеющего частоту  $\omega_n$ .

Итак, амплитудное модулирование может быть получено в цепях, осуществляющих органическое преобразование спектра - нелинейных и линейных параметрических цепях.

### 12.1. Получение амплитудной модуляции (АМ) с применением нелинейных каскадов

Схема, демонстрирующая процесс АМ с использованием нелинейного элемента, изображена на рис. 12.1.



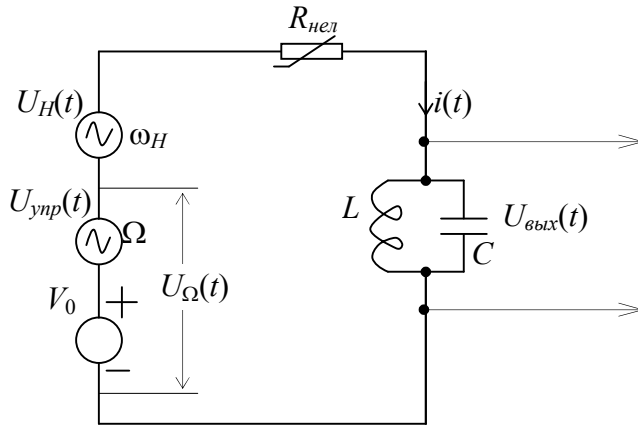


Рис. 12.1

Воздействующие на цепь напряжения от задающего генератора  $U_H(t)$ , от генератора модулирующего сигнала  $U_{ynp}(t)$  и напряжение смещения НРТ  $V_0$ , включены последовательно с нелинейным элементом. Ток  $i(t)$ , протекающий в цепи, содержит множество гармонических составляющих: с частотами  $\omega_H$  и  $\Omega$ , а также кратные и комбинационные частоты. Колебательный контур настроен на частоту  $\omega_H$ , следовательно, на контуре выделится  $U_{вых}(t) = I_1 R_{экр}$ , где  $I_1$  - амплитуда тока первой гармоники частоты  $\omega_H$ ,  $R_{экр}$  - резонансное сопротивление контура.

Из-за наличия нелинейного элемента ток первой гармоники  $I_1$  зависит от напряжения смещения  $U_\Omega$  и амплитуда его  $I_1 = f(U_\Omega)$  является статической модуляционной характеристикой.

Выясним, как амплитуда первой гармоники  $I_1$  зависит от смещения. Положим, что ВАХ нелинейного сопротивления выражается полиномом

$$i = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3 + \dots = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k u^k \quad (12.1)$$

Полагая, что сопротивление контура много меньше сопротивления нелинейного элемента, получим напряжение на нелинейном элементе  $R_{нел}$

$$u = u_R = U_H \cos \omega_H t + U_\Omega(t) \text{ и ток } i = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k [U_H \cos \omega_H t + U_\Omega(t)]^k \quad (12.2)$$

Представив это выражение в развернутом виде, можно найти амплитуду  $I_1$  (ток первой гармоники)

$$I_1 = b_1 U_H + \frac{3}{4} b_3 U_H^3 + \dots + (2b_2 U_H + 3b_4 U_H^3) U_\Omega(t) + (3b_3 U_H + \dots) U_\Omega^2(t) + (4b_4 U_H + \dots) U_\Omega^3(t) + \dots \quad (12.3)$$

Отсюда видно, что при заданном  $U_H$  зависимость амплитуды  $I_1$  от амплитуды  $U_\Omega$ , вообще говоря, отличается от прямой линии. Только в том случае, когда  $b_3 = b_4 = b_5 = \dots = 0$ , т.е. когда ВАХ выражается полиномом второй степени, зависимость  $I_1 = f(U_\Omega)$  (где  $U_\Omega$  - амплитуда  $U_{ynp} + V_0$ ) является прямой, т.е. зависимость  $I_1 = f(U_\Omega)$  линейна.

$$I_1 = b_1 U_H + 2b_2 U_H U_\Omega. \quad (12.4)$$



Итак, для получения неискаженной АМ необходим нелинейный элемент с характеристикой, выражаемой полиномом второй степени. Нелинейные искажения в реальных модуляторах оценивают по коэффициенту нелинейных искажений  $k = \sqrt{\frac{I_2^2 + I_3^2 + \dots}{I_1^2}}$ , где  $I_n$  - амплитуды гармоник модулирующего колебания.

Линейность статической модуляционной характеристики является необходимым, но не достаточным условием того, что огибающая высокочастотного (ВЧ) колебания без искажений воспроизводит форму управляющего сигнала. Следует обеспечить минимум частотных (линейных) искажений при прохождении тока, имеющего коэффициент модуляции  $m$ , через колебательный контур. Для этого необходимо, чтобы полоса пропускания контура  $\Delta\omega_k$  была не менее удвоенной максимальной частоты модуляции  $\Omega_{\text{макс}}$ , т.е.

$$\Delta\omega_k = \frac{\omega_0}{Q} \geq 2\Omega_{\text{макс}}.$$

Для оценки искажений, связанных с неодинаковой передачей модулирующих частот, используют динамические модуляционные характеристики - зависимость глубины модуляции колебаний на выходе модулятора от амплитуды управляющего воздействия, снимаемого при некоей определенной и неизменной частоте модуляционного сигнала  $F$ . Напомним, что для тональной АМ колебания

$$U_{AM}(t) = U_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos(\omega_n + \varphi_n), \quad m = \frac{\Delta U}{U_0}.$$

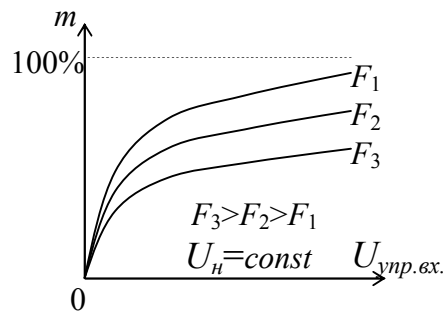


Рис. 12.2

## 12.2. Модуляция в параметрических цепях

Теория элементарных параметрических цепей, изложенная в разделе 7, приводит к заключению, что амплитудную модуляцию можно получить и в линейной цепи с переменными параметрами.

Представим себе простейшую параметрическую цепь, в которой проводимость меняется с частотой  $\Omega$   $g(\Omega t) = g_0(1 + m \cos \Omega t)$ .

Пусть цепь питается от источника  $u = U_n \cos(\omega_{Ht} + \varphi_n)$ .



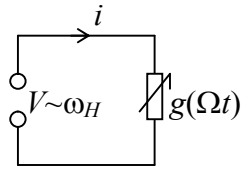


Рис. 12.3

Ток, протекающий в цепи,  $i = gu = U_H g_0(1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega_H t + \varphi_H)$ .

Нетрудно видеть, что ток  $i$  представляет собой колебание, модулированное по амплитуде сигналом с частотой  $\Omega$ . Коэффициент модуляции равен коэффициенту вариации проводимости  $m$ .

Параметрическую модуляцию можно осуществить, например, на датчике Холла, на полевом транзисторе, на магнитном сопротивлении, схеме перемножения и т.д.

Интересно отметить, что рассмотренный ранее метод модуляции на нелинейности может трактоваться как метод, использующий параметрический подход.

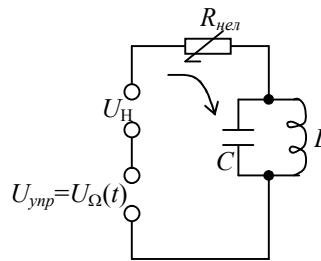


Рис. 12.4

Нелинейный элемент  $R_{нел}$  находится под воздействием двух напряжений  $U_H(t)$ , имеющего высокую частоту  $\omega_H$ , и  $U_{ynp}(t)$ , изменяющегося с частотой  $\Omega$ .

Пусть  $U_H(t) \ll U_{ynp}(t)$ . Тогда нелинейный элемент можно рассматривать как линейный, крутизна  $S$  которого изменяется во времени с частотой  $\Omega$ . В этих условиях ток цепи

$$i_{\omega}(t) = S(t, \Omega) U_H(t) \cos \omega_H t.$$

Здесь  $S(t, \Omega) \cdot U_H$  – амплитуда ВЧ тока.

Так как под воздействием управляющего напряжения  $U_{ynp}(t)$  крутизна  $S$  изменится во времени, ВЧ ток оказывается модулированным по амплитуде.

Модуляция будет неискаженной, если крутизна  $S$  пропорциональна управляющему напряжению, т.е.

$$S = \frac{di}{dU_{ynp}} = b_1 + 2b_2 U_{ynp}, \quad (12.5)$$

где  $i = b_0 + b_1 U_{ynp} + b_2 U_{ynp}^2 + \dots$ ,  $b_1$  и  $b_2$  – некоторые постоянные. Отсюда можно определить вид нелинейности ВАХ, требуемой для параметрической модуляции:

$i = \int S dU_{ynp} = \int (2b_2 U_{ynp} + b_1) dU_{ynp} = b_2 U_{ynp}^2 + b_1 U_{ynp} + b_0$ , т.е. это полином второй степени. Этот вывод совпадает с ранее сделанным в разделе 12.1.



### 12.3. Техническая реализация амплитудной модуляции

В генераторах и передатчиках серьезным требованием является получение большой мощности при хорошем КПД. Ясно, что квадратичный режим работы нелинейного элемента этому требованию не отвечает. Для улучшения энергетических показателей модуляции резистивный нелинейный элемент должен работать в существенно нелинейном режиме, с отсечкой тока. Поэтому модуляция амплитуды ВЧ колебания сводится к воздействию модулирующим напряжением на нелинейный резонансный усилитель (рис.12.5-а)

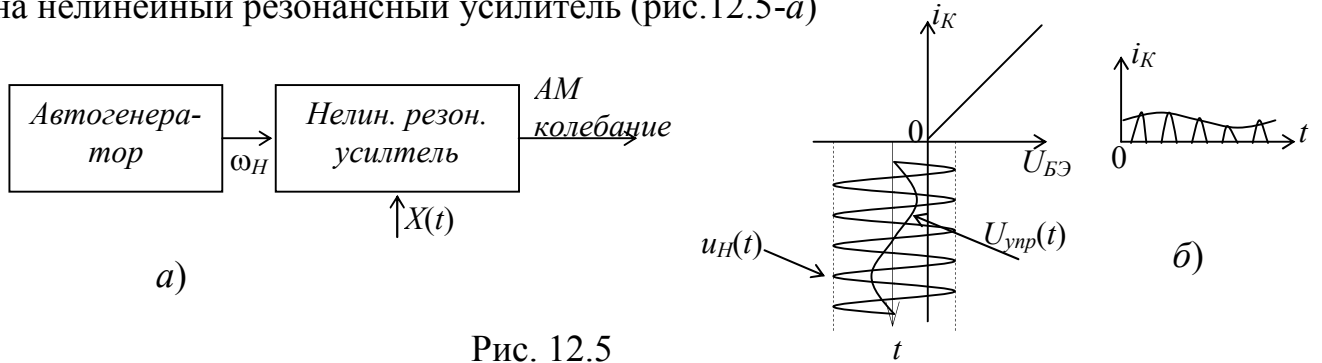


Рис. 12.5

На вход нелинейного резонансного усилителя, работающего с отсечкой, подается несущее колебание с частотой  $\omega_H$  от независимого источника. Модулирующее колебание изменяет положение рабочей точки на ВАХ, в результате чего меняется амплитуда на выходе (рис.12.5-б).

Принципиальная схема каскада, реализующего процесс АМ приведена на рис. 12.6.

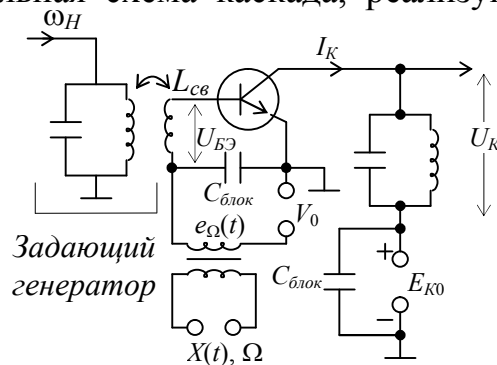


Рис. 12.6

Напомним, что ток коллектора зависит от тока базы:  $I_K = \beta I_\theta$ . Как следствие здесь, вообще говоря, меняется средняя крутизна нелинейного резонансного усилителя в соответствии с законом изменения модулирующего колебания, т.е. это параметрическая система.

Действительно, в результате должно быть  $U_{вых}(t) = U_H [1 + m U_{ynp}(t)] \cos \omega_H t$ . Если на вход модулируемого усилителя действует гармоническое колебание  $u_H(t) = U_H \cos \omega_H t$ , из сопоставления  $U_{вых}(t)$  и  $u_H(t)$  видно, что передаточная функция

$$\dot{K}(j\omega_H, t) = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{U_H [1 + m U_{ynp}(t)] e^{j\omega_H t}}{U_H e^{j\omega_H t}} = [1 + m U_{ynp}(t)]. \quad (12.6)$$

Т.е. передаточная функция параметрической цепи не зависит от частоты  $\omega_H$  и соответствует усилителю, у которого коэффициент усиления изменяется пропорционально величине  $1 + m U_{ynp}(t)$ .



## 12.4. Частотная модуляция (ЧМ) в автогенераторе

Задачу получения ЧМ колебаний можно сформулировать как задачу создания генератора гармонических колебаний, частота которого должна изменяться в соответствии с законом изменения управляющего сигнала. Частота колебаний генератора определяется резонансной частотой контура  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  и, следовательно, для ее изменения необходимо менять либо емкость  $C$ , либо индуктивность  $L$ .

Продифференцировав  $\omega_0$ , например, по  $C$  получим  $\frac{d\omega_0}{dC} = -\frac{\omega_0}{2C}$  или  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C_0}$ . Аналогично

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L_0} \quad (12.7)$$

Как видно, при малых изменениях частоты можно считать, что она пропорциональна емкости, т.е., желая получить модулированное колебание, следует изменить емкость (или индуктивность) контура в соответствии с передаваемым сообщением. Итак, контур должен содержать емкостной (или индуктивный) параметрический элемент.

Широко распространенным способом электронного управления является подключение к контуру варикапа, емкость которого зависит от напряжения, приложенного в направлении запирающего перехода.

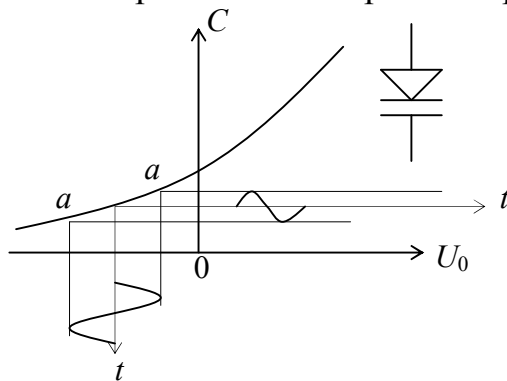


Рис. 12.7

Упрощенная схема автогенератора с варикапом изображена на рис. 12.8.

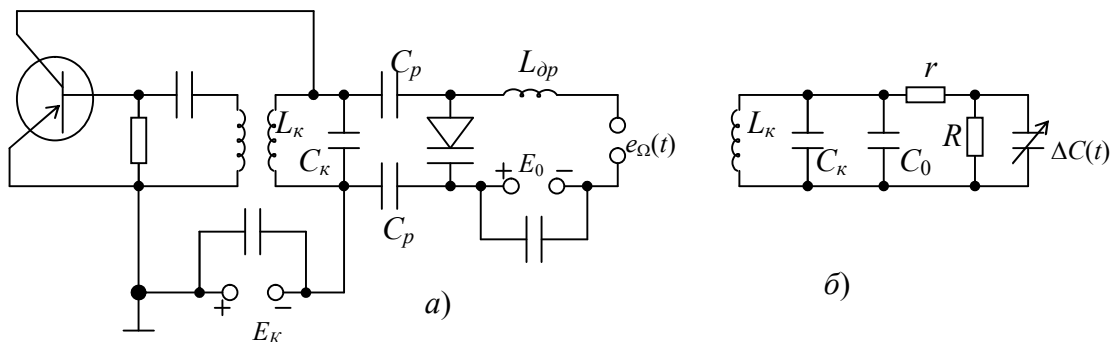


Рис. 12.8



Разделительный конденсатор  $C_p$ , предназначен для развязки контура от источника  $E_0$ . Источник  $E_0$  устанавливает начальную рабочую точку (НРТ) на вольт-фарадной характеристике варикапа. Блокировочный дроссель  $L_{op}$  предназначен для того, чтобы ВЧ ток от автогенератора не проходил в источник ЭДС  $e_{\Omega}(t)$ .

На схеме замещения (рис. 12.8-б):  $C_0$  – средняя емкость в отсутствии модулирующего колебания,  $\Delta C(t)$  – вариация емкости в зависимости от  $e_{\Omega}(t)$ . Сопротивление  $p$ - $n$  перехода –  $R$ , объемное сопротивление полупроводника  $r$ .

Если напряжение на емкости достаточно мало, то, как отмечено выше, нелинейный элемент (в данном случае емкость) можно трактовать как линейный параметрический. Принимая рабочий участок «а-а» зависимости  $C(U)$  (рис. 12.7) за прямую линию получим следующее.

Управляющее напряжение меняется по закону  
 $u_{упр} = E_0 + U_C \cos \Omega t$ , то емкость  $C = C_0(1 + m_C \cos \Omega t)$ ,

где  $m_C = \Delta C / C_0$ . Соответственно частота  $\omega_0(t) \approx \omega_{0H} - \Delta \omega \cos \Omega t$ , где  $\omega_{0H} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ .

$$\Delta \omega \approx \omega_{0H} \cdot \frac{\Delta C}{2C_0} = \frac{1}{2} m_C \omega_{0H} - \text{девиация частоты} \quad (12.10)$$

## 12.5. Фазовая модуляция (ФМ)

Пусть требуется получить колебание вида:

$u_{вых}(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0]$ , где  $\varphi(t)$  – фаза, модулированная по заданному закону.

Рассматривая  $u_{вых}(t)$ , как колебание на выходе линейного параметрического четырехполюсника, на вход которого подается несущее колебание  $u_H(t) = U_H \cos \omega_0 t$ , найдем передаточную функцию этого четырехполюсника. Для этого перейдем от заданной функции  $u_{вых}(t)$  и  $u_H(t)$  к комплексным колебаниям

$$\dot{K}(j\omega_0, t) = \frac{U_0 \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0)}}{U_H e^{j\omega_0 t}} = K_0 e^{j(\varphi(t) + \varphi_0)} = K_0 e^{j\omega_0 \tau(t)} \quad (12.9)$$

Четырехполюсник с такой передаточной функцией можно трактовать как линию задержки  $\tau(t)$ , отвечающую условию

$$\omega_0 \tau(t) = \varphi(t) + \varphi_0. \quad (12.10)$$

Отсюда следует, что для осуществления фазовой модуляции требуется линейная цепь с задержкой  $\tau(t)$ , изменяющейся во времени по закону  $\tau(t) = (1/\omega_0)(\varphi(t) + \varphi_0)$ . Так как задержка в физической цепи не может быть отрицательной, то слагаемое  $(\varphi_0/\omega_0) = \tau_0$ , имеющее смысл постоянной задержки, в

отсутствии модуляции должно быть не меньше, чем  $\frac{1}{\omega_0} |\varphi(t)|_{\max}$ , т.е.  $\frac{\varphi_0}{\omega_0} \geq \frac{|\varphi(t)|}{\omega_0}$ .

Реализация линии задержки, допускающей электронное управление  $\tau(t)$ , является непростой задачей. Удачное ее решение получается в диапазоне СВЧ при использовании электронных приборов типа ЛБВ.



В диапазоне метровых и более длинных волн наибольшее распространение получили способы, основанные на изменении резонансной частоты колебательного контура усилителя при неизменной частоте возбуждения  $\omega_0$ . Одна из таких схем показана на рис. 12.9.

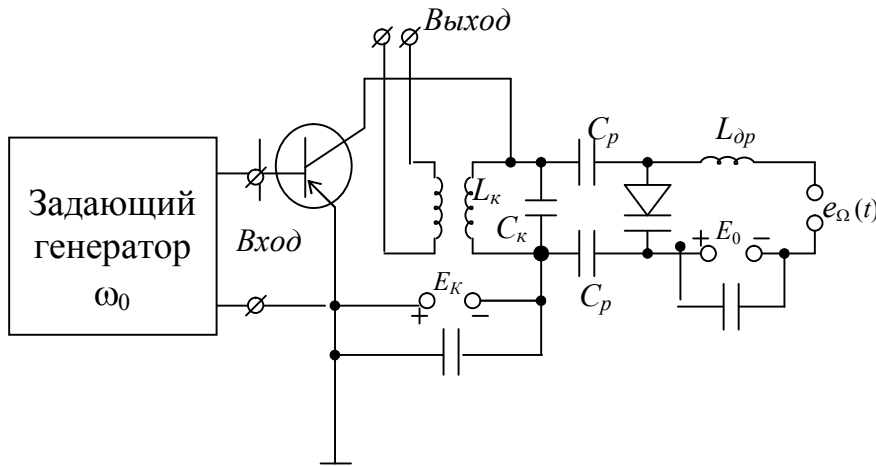


Рис. 12.9

В этом устройстве резонансная частота контура усилителя модулируется с помощью варикапа. Имеется, однако, принципиальное различие между этим устройством и рассмотренным ранее методом ЧМ. Изменение резонансной частоты контура в автогенераторе равносильно изменению частоты генерируемых колебаний. В случае же возбуждения усилителя независимым источником несущего колебания с частотой  $\omega_0$  изменение резонансной частоты контура  $\omega_\kappa$  влияет лишь на фазу выходного колебания. Фазовый сдвиг определяется из ранее выведенной формулы:

$$\varphi(t) = \arctg \frac{2\Delta\omega(t)}{\omega_\kappa(t)} Q_{\text{экв}} \approx \arctg \frac{2\Delta\omega(t)}{\omega_0(t)} Q_{\text{экв}}, \text{ где } \Delta\omega(t) = \omega_\kappa(t) - \omega_0.$$

Замена  $\omega_\kappa$  на  $\omega_0$  допустима из-за малости  $\Delta\omega$ .

Недостаток этого метода - малый индекс модуляции.

### 13. Детектирование сигналов

Детектирование колебаний заключается в выделении сообщения, которое в неявной форме содержится в модулированном ВЧ колебании. Детектирование является процессом обратным процессу модуляции. Соответственно основным видам модуляции различают амплитудное, частотное и фазовое детектирование.

#### 13.1. Амплитудное детектирование (постановка задачи)

Пусть к входу детектора подводится АМ напряжение

$$u_{\text{ex}}(t) = U_H \cos \omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} U_{\text{в} \delta n} \cos[(\omega_0 + n\Omega)t - \varphi_n] + \sum_{n=1}^{\infty} U_{\text{н} \delta n} \cos[(\omega_0 - n\Omega)t + \varphi_n], \quad (13.1)$$



содержащее колебание несущей частоты  $\omega_0$  с амплитудой  $U_H$  и, в общем случае, бесчисленное множество колебаний боковых частот  $\omega_0 \pm \Omega$ ,  $\omega_0 \pm 2\Omega, \dots$ ,  $\omega_0 \pm n\Omega, \dots$ , имеющих амплитуды  $U_{\delta 1}$ ,  $U_{\delta 2}$ ,  $\dots, U_{\delta n}$ ,  $\dots$  (см. рис.13.1-а).

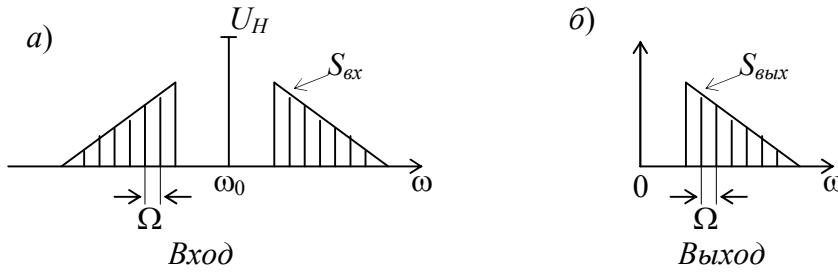


Рис. 13.1

На выходе должно быть получено сообщение (управляющий сигнал)

$u_{\text{вых}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{\delta n} \cos(n\Omega t - \varphi_n)$ , содержащее колебания модулирующих частот  $\Omega$ ,

$2\Omega, \dots, n\Omega$ , отсутствующих в спектре входного напряжения  $U_{\text{вх}}(t)$  (см. рис. 13.1-б).

Спектральная функция  $S_{\text{вых}}(\omega)$  должна по форме своей повторять спектральную функцию  $S_{\text{вх}}(\omega - \omega_0)$  верхней боковой полосы радиосигнала.

Из сказанного следует, что детектирование не может быть осуществлено в линейной цепи с постоянными параметрами, а только в нелинейной цепи или цепи линейной с переменными параметрами.

### 13.2. Амплитудное детектирование нелинейными цепями

Попытаемся, прежде всего, установить, каким видом нелинейности должна обладать цепь для решения задачи детектирования АМ сигналов.

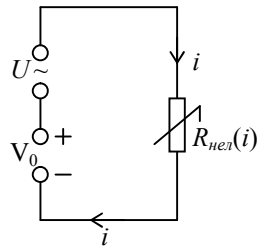


Рис. 13.2

Нелинейное активное сопротивление, как и всякие нелинейные элементы, обладает свойством органического преобразования частоты.

Если к нелинейному сопротивлению подведено гармоническое напряжение частоты  $\omega$  последовательно с постоянным напряжением  $V_0$ , то ток в цепи имеет форму, отличную от синусоидальной, и может быть представлен в виде ряда Фурье

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t - \varphi) \quad (13.2)$$

ВАХ может быть представлена степенным полиномом в виде разложения в окрестности напряжения смещения:



$$i = a_0 + a_1(u - V_0) + a_2(u - V_0)^2 + a_3(u - V_0)^3 + \dots + a_n(u - V_0)^n =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k (u - V_0)^k.$$

В этом выражении  $a_0=i_0$  - ток "покоя", т.е. ток, проходящий через элемент, когда на него воздействует только постоянное напряжение  $V_0$ .

Так как в рассматриваемом случае  $u=U\cos\omega t+V_0$ , то мгновенное значение тока

$$i = i_0 + S_0 U \cos \omega t + a_2 U^2 \cos^2 \omega t + a_3 U^3 \cos^3 \omega t + \dots +$$

$$+ a_n U^n \cos^n \omega t = i_0 + \sum_{k=1}^n a_k U^k \cos^k \omega t. \quad (13.3)$$

Как известно из тригонометрии, члены четных степеней ряда (13.3) –  $k=2m$  дают слагаемые всех четных гармоник вплоть до  $2m$  – й, а также дополнительные постоянные слагающие; члены же нечетных степеней ( $k=2m+1$ ) приводят к появлению составляющих всех нечетных гармоник вплоть до  $(2m+1)$  – й, а также дополнительные слагаемые основной частоты (первой гармоники).

Приведем несколько значений амплитуды слагаемых тока через нелинейное сопротивление

$$I_0 = i_0 + \frac{1}{2} a_2 U^2 + \frac{3}{8} a_4 U^4 + \dots + \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} a_{2m} U^{2m} + \dots$$

$$I_1 = S_0 U + \frac{3}{4} a_3 U^3 + \frac{5}{8} a_5 U^5 + \dots + \frac{(2m+1)!}{2^{2m} m!(m+1)!} a_{2m+1} U^{2m+1} + \dots$$

.....

$$I_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{2^{2m+k-1} m!(m+k)!} a_{2m+k} U^{2m+k}. \quad (13.4)$$

Отсюда следуют важные выводы:

- В режиме малых колебаний  $I_0=i_0$ ;  $I_1=S_0 U$ , т.е. имеем только постоянную составляющую и первую гармонику.
- В отличие от малых колебаний, в режиме больших колебаний слагаемое  $I_0 \neq i_0$ . В зависимости от характера нелинейности и положения НРТ (т.е. знака и величины коэффициентов  $a_2, a_4, \dots, a_{2m}$ ) ток  $I_0$  может быть больше или меньше, чем  $i_0$ .

Разность  $I_\delta = I_0 - i_0$  называется током детектирования.

- Различие в величинах постоянного тока в динамическом  $I_0$  и статическом  $i_0$  режимах зависит, при прочих равных условиях, от амплитуды переменного напряжения  $U$ .

Поэтому разность  $I_\delta = I_0 - i_0$  дает возможность обнаружить переменное напряжение, действующие в цепи, и судить о его величине.

Как было показано выше, при воздействии переменного напряжения на нелинейный элемент в режиме больших колебаний, постоянная слагающая изменится на величину детекторного тока. Аналогично можно говорить о напряжении детекторного эффекта



$$U_{\delta} = I_{\delta} R, \tag{13.5}$$

которое создается током  $I_{\delta}$  на сопротивлении нагрузки  $R$ .

Если ВАХ нелинейного элемента такова, что ток покоя  $i_0 = 0$ , то ток детектирования и приращение напряжения, обусловленное детекторным эффектом, совпадают с постоянными слагающими  $I_0$  и  $U_0$  (выпрямленными током и напряжением), т.е.  $I_{\delta} = I_0$ ;  $U_{\delta} = U_0$ .

Напряжение и ток детекторного эффекта  $U_{\delta}$  и  $I_{\delta}$  зависят от амплитуды и переменного напряжения, поэтому они могут служить для обнаружения сигнала.

### 13.2.1. Особенности амплитудного детектирования на нелинейности

Рассмотрим простейшую схему последовательного амплитудного детектора (рис.13.3-а).

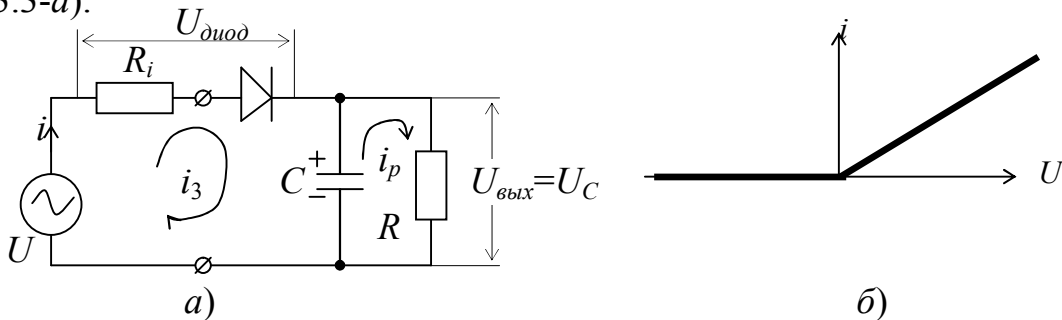


Рис. 13.3

1) Детектирование немодулированного сигнала (рис.13.4)

Пусть имеем диод с ВАХ  $\begin{cases} i = \frac{U}{R_i}, & U \geq 0 \\ i = 0, & U < 0 \end{cases}$ , тогда ток  $i$  через диод проходит

только в одном направлении и происходит заряд емкости. Причем  $U_{\text{диод}} = U - U_C$ , т.е. при  $U - U_C \geq 0$  ток  $i \geq 0$ ,  $U - U_C < 0$  ток  $i = 0$ .

Разряд идет через сопротивление  $R_H$ .

Заряд от  $t_1$  до  $t_2$  ( $U > U_C$ ), при  $t = t_2$   $U = U_C$ , т.е.  $U_{\text{диод}} = 0$ .

Разряд от  $t_2$  до  $t_3$  т.к.  $U < U_C$ , при  $t = t_3$   $U = U_C$ , т.е.  $U_{\text{диод}} = 0$ .

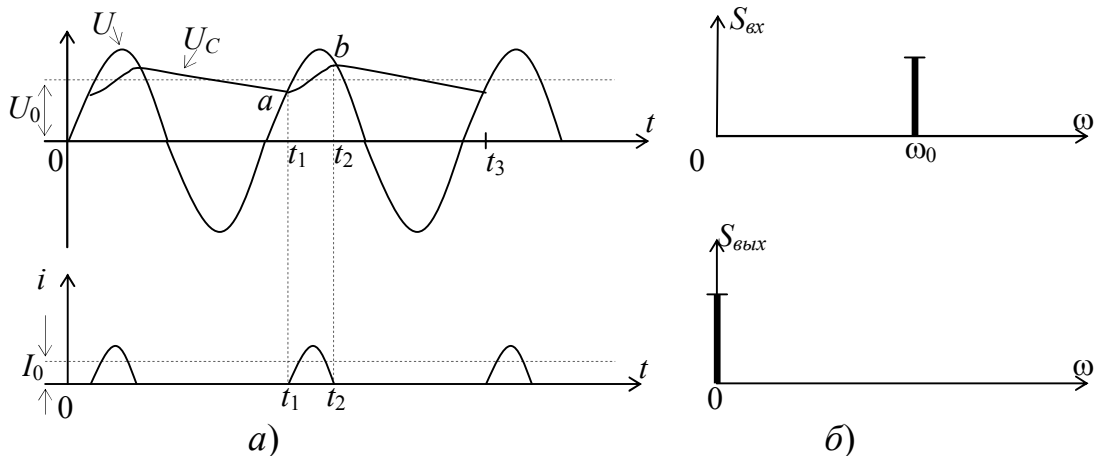


Рис. 13.4

Емкость играет роль фильтрующего (сглаживающего) элемента. Выходное напряжение меняется в небольших пределах  $U_{C \min} = U \cos \omega t_1$ ;  $U_{C \max} = U \cos \omega t_2$



Переменная составляющая тока  $i$  почти полностью фильтруется емкостью  $C$ , а постоянная его составляющая  $I_0$  замыкается через сопротивление  $R$ , создавая на нем падение напряжения  $U_0=I_0R$  (рис. 13.4-а).

Спектры при детектировании немодулированного колебания приведены на рис. 13.4-б.

## 2) Детектирование АМ сигнала

Попытаемся установить, каким видом нелинейности должна обладать цепь для детектирования АМ сигналов.

Так как напряжение и ток детектирования  $U_\delta$  и  $I_\delta$  зависят от амплитуды  $U(t)$  переменного напряжения (см. 13.4), отсюда следует, что в качестве детектора АМ сигнала можно использовать схему выпрямления (рис. 13.3).

Таким образом, полезным продуктом нелинейности является изменение напряжения детектирования  $\Delta U_\delta(t)$ , вызванное изменением воздействия  $\Delta U$ .

Рассмотрим зависимость  $U_\delta=f(U)$ ,  $I_\delta=f(U)$ , которая называется детекторной характеристикой.

Пусть ВАХ нелинейного элемента выражается полиномом вида

$$i = i_0 + a_1(u - V_0) + a_2(u - V_0)^2 + a_3(u - V_0)^3 + \dots, \quad (13.6)$$

где  $V_0$  – напряжение смещения,  $u = V(t)\cos\omega_0t + V_0$

Ток через диод при воздействии на него переменного напряжения с амплитудой  $U(t)$  содержит постоянную составляющую (см. 13.4)

$$I_0 = i_0 + \frac{a_2U^2}{2} + \frac{3}{8}a_4U^4 + \dots + \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}a_{2m}U^{2m} + \dots \quad (13.7)$$

Значит ток детектирования

$$I_\delta = I_0 - i_0 = a_2 \frac{U^2}{2} + \frac{3}{8}a_4U^4 + \dots \quad (13.8)$$

Это выражение представляет собой детекторную характеристику, которая существенно отличается от линейной.

а) При слабых сигналах членами высших степеней ряда (13.8) можно пренебречь

$$I_\delta \approx a_2 \frac{U^2}{2}, \quad (13.9)$$

т.е. это квадратичный детектор, т.к. ток детектирования пропорционален квадрату амплитуды входного напряжения.

Пусть амплитуда входного напряжения меняется по следующему закону  $U=U_0(1+m\cos\Omega t)$ , тогда

$$\begin{aligned} I_\delta &= \frac{1}{2}a_2U_0^2(1+m\cos\Omega t)^2 = \frac{1}{2}a_2U_0^2\left(1+\frac{m^2}{2}\right) + ma_2U_0^2\cos\Omega t + \\ &+ a_2\frac{m^2}{4}U_0^2\cos 2\Omega t = I_0 + i_1 + i_2. \end{aligned}$$



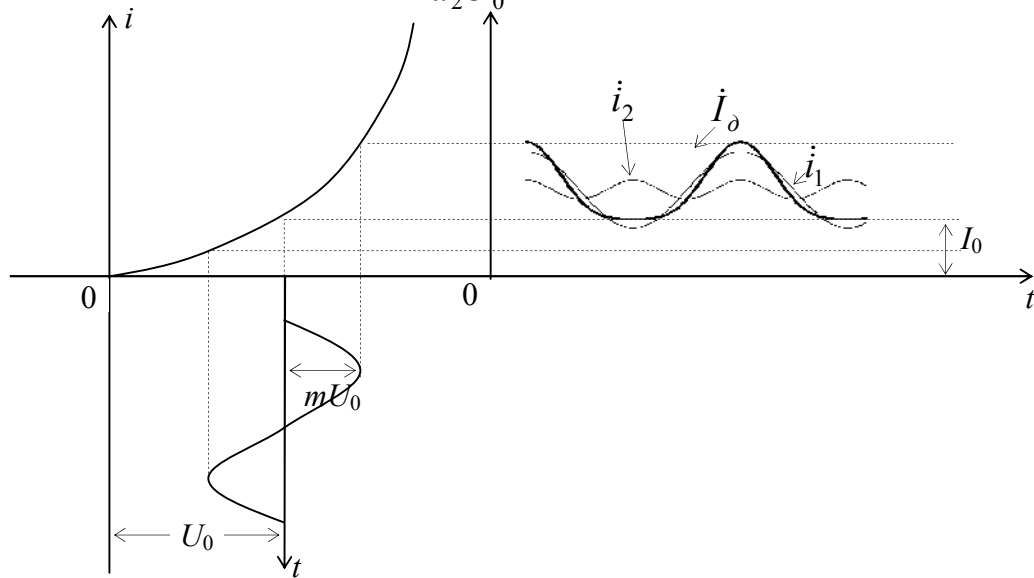


Рис. 13.5

Детекторный ток содержит три составляющие (см. рис.13.5):

- ток  $I_0 = \frac{1}{2} a_2 U_0^2 \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right)$  - постоянная составляющая, величина которой растет с увеличением глубины модуляции по квадратичному закону;
- слагающую частоты  $\Omega$  с амплитудой  $I_1 = m a_2 U_0^2$ , а должно быть при безискаженной модуляции  $m U_0$ ;
- слагающую удвоенной частоты модуляции с амплитудой  $I_2 = \frac{m^2 a_2}{4} U_0^2$ . Т.е. при квадратичном детектировании имеют место нелинейные искажения с коэффициентом гармоник  $K_\partial = \frac{I_2}{I_1} = \frac{m}{4}$ .

б) Рассмотрим детектирование идеальным вентилем, ВАХ которого изображена на рис. 13.6.

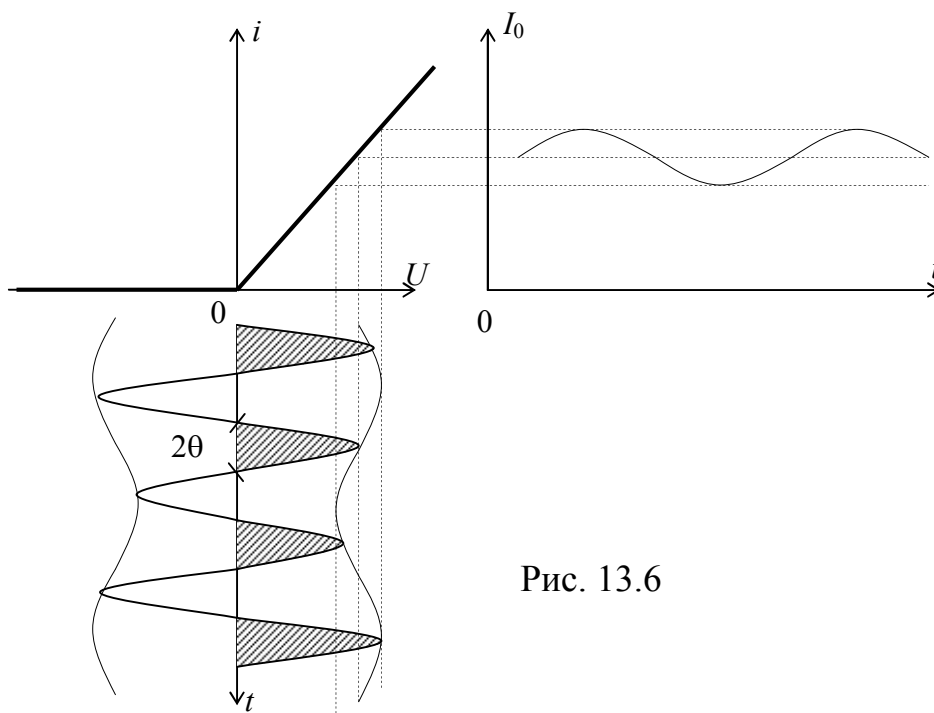


Рис. 13.6



Ток, протекающий через нелинейный элемент с такой характеристикой, имеет форму импульсов, высота которых изменяется в такт с огибающей ВЧ колебания.

Постоянная составляющая (полезный сигнал, выделяемый фильтром) этих импульсов имеет вид  $I_0 = \alpha_0 i_{max}$ , где  $\alpha_0$  – угол Берга, зависящий от угла отсечки;  $i_{max}$  – амплитуда импульса.

Выберем на характеристике рабочую точку так, чтобы угол отсечки  $\theta = \pi/2$ . Как известно, при  $\theta = \pi/2$  угол отсечки не зависит от амплитуды приложенного напряжения и остается постоянным. Постоянным остается и коэффициент  $\alpha_0 \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi}$ . Тогда в этом случае  $i_{max} = SU(t)$ ,

где  $S$  – крутизна,  $U(t)$  – амплитуда заполнения, т.е. огибающая. Отсюда

$$I_0(t) = \frac{S}{\pi} U(t) \quad (13.10)$$

Выходной сигнал без искажений повторяет форму огибающей, т.е. имеет место “линейное” детектирование.

### 13.2.2. Нелинейные искажения при детектировании АМ сигнала

Нелинейные искажения при детектировании возникают по следующим причинам:

- 1) За счет квадратичности детекторной характеристики при детектировании слабых сигналов (см. (13.8) и рис. 13.5).
- 2) Вследствие неправильного выбора постоянной времени нагрузки.

Этот тип искажений обусловлен противоречивостью требований  $T_{огуб} \gg RC \gg T_0$ , т.е.

$$\frac{1}{\Omega C} \gg R \gg \frac{1}{\omega_0 C}, \quad (13.11)$$

где  $\Omega \ll \omega_0$ .

Чтобы было качественное выпрямление ВЧ колебаний, необходимо, чтобы была большая емкость  $C$ , т.е.  $C \gg T_0/R$  или  $\omega_0 C \ll 1/R$ . То есть проводимость емкости для всех переменных составляющих тока ВЧ должна быть больше проводимости нагрузки. В то же время емкость  $C$  не должна быть чрезмерно большой, т.к. при этом сопротивление  $R$  оказалось бы шунтированным не только для токов ВЧ, но и для полезных колебаний с частотой  $\Omega$ .

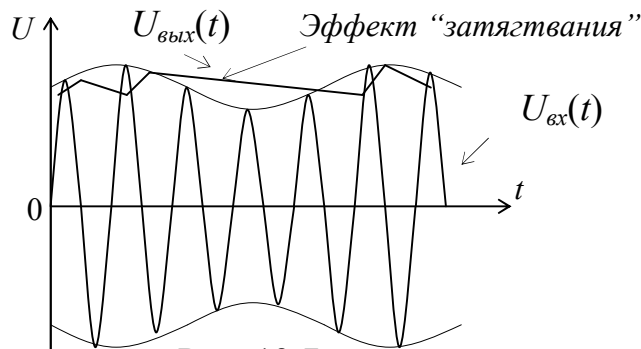


Рис. 13.7



На рис. 13.7 приведено качественное представление этого эффекта, которое проявляется в "затягивании" огибающей при ее отрицательной полуволне.

Это нелинейное искажение, т.к. в детекторе цепи заряда и разряда имеют разные постоянные времени.

### 13.2.3. Частотные искажения при амплитудном детектировании.

Коэффициент передачи детектора найдем по определению  $\dot{K} = \frac{\dot{U}_{\text{вых}\Omega}}{\dot{U}_{\text{вх}\Omega}}$ .

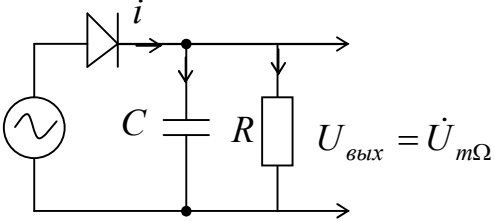
$$U_{\text{вых}} = i_{\text{д}} \cdot Z_{\text{Н}}; Z_{\text{Н}} = \frac{R}{1 + jR\Omega C}.$$


Рис. 13.8

Для синусоидального модулированного сигнала  $\dot{K}_{\text{д}} = \frac{\dot{U}_{m\Omega}}{mU_0}$ , (13.12)

где  $U_{m\Omega}$  – амплитуда напряжения частоты  $\Omega$  на выходе детектора,  $U_0$  – амплитуда напряжения несущей частоты,  $m$  – глубина модуляции,  $mU_0$  – амплитуда огибающей АМ сигнала.

Учитывая, что нагрузкой является  $RC$  цепь, имеем следующее выражение для коэффициента передачи:

$$\dot{K}_{\text{д}\Omega} = \frac{K_0}{1 + j\Omega CR}. \quad (13.13)$$

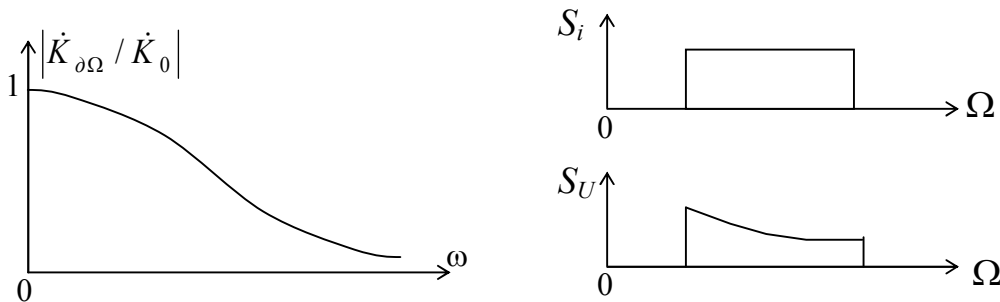


Рис. 13.9

Из выражения (13.13) видно, что на выходе амплитудного детектора происходит уменьшение амплитуды высокочастотных составляющих модулирующего колебания (рис. 13.9).

### 13.3. Амплитудное детектирование в параметрических цепях

Анализ параметрических цепей (см. раздел 7) свидетельствует о том, что и в этих цепях может быть получен эффект детектирования.



Снова рассмотрим цепь, содержащую изменяющееся во времени активное сопротивление. Т.к. цепь линейна, то статическая  $g_0$  и дифференциальная  $g_\delta = S$  проводимости равны между собой  $g_0 = g_\delta = S$ .

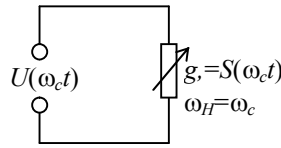


Рис. 13.10

Рассмотрим процесс детектирования на примере синхронного детектора (СД). Пусть крутизна каскада меняется по закону

$$S(\Omega_C t) = S_0(1 + m_H \cos \omega_C t), \quad (13.14)$$

где  $m_H = \Delta S / S_0$  – коэффициент вариации крутизны.

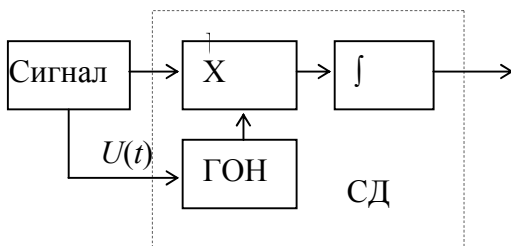


Рис. 13.11

При воздействии АМ сигнала  $U = U_0(1 + m_C \cos \Omega_C t) \cos(\omega_C t + \varphi)$  ток на выходе перемножающего устройства

$$\begin{aligned} i &= SU = S_0(1 + m_H \cos \omega_C t) \cdot U_0(1 + m_C \cos \Omega_C t) \cos(\omega_C t + \varphi) = \\ &= S_0 U_0 (1 + m_C \cos \Omega_C t) \left[ \cos(\omega_C t + \varphi) + \frac{m_H}{2} \cos \varphi + \frac{m_H}{2} \cos(2\omega_C t + \varphi) \right]. \end{aligned}$$

Как видно из этого выражения, выходной ток НЧ, выделяемый интегратором равен

$$i_{НЧ} = \frac{S_0 U_0}{2} m_H [1 + m_C \cos \Omega_C t] \cdot \cos \varphi. \quad (13.15)$$

Ток пропорционален переменной амплитуде АМ сигнала. В случае синфазности опорного и измеряемого сигналов ( $\varphi = 0$ )

$$i_{НЧ} = \frac{S_0 U_0}{2} m_H [1 + m_C \cos \Omega_C t]. \quad (13.16)$$

Рассмотрим случай воздействия на СД сигнала и помехи

$$U_{вх} = U_0 [1 + m_C \cos \Omega_C t] \cdot \cos \omega_C t + U_n \cos \omega_n t.$$

Пусть крутизна меняется по закону  $S = S_0 [1 + m_H \cos \omega_H t]$ .

Примем  $\omega_C = \omega_H \neq \omega_n$ , тогда т.к.  $i = S U_{вх}$ , имеем:



$$\begin{aligned}
i &= S_0(1 + m_H \cos \omega_C t)[U_0(1 + m_C \cos \Omega_C t)\cos \omega_C t + U_n \cos \omega_n t] = \\
&= S_0 U_0(1 + m_C \cos \Omega_C t)[(1 + m_H \cos \omega_C t)\cos \omega_C t] + \\
&+ S_0(1 + m_H \cos \omega_C t)U_n \cos \omega_n t = S_0 U_0(1 + m_C \cos \Omega_C t)\left[\cos \omega_C t + \frac{m_H}{2}(1 + \cos 2\omega_C t)\right] + \\
&+ S_0\left[U_n \cos \omega_n t + \frac{m_H U_n}{2}\left(\cos(\omega_C + \omega_n)t + \frac{m_H U_n}{2}\cos(\omega_C - \omega_n)t\right)\right].
\end{aligned}$$

В области средних и низких частот имеем:

$$i_{\sim} = \frac{S_0 U_0}{2} m_H (1 + m_C \cos \Omega_C t) + \frac{S_0 U_n m_H}{2} \cos(\omega_C - \omega_n)t. \quad (13.17)$$

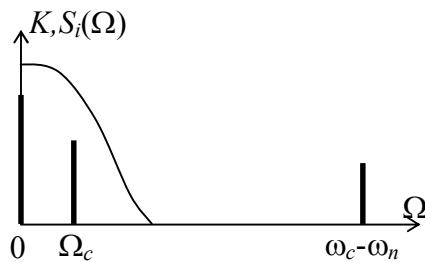


Рис. 13.12

После интегратора, если  $\omega_C - \omega_n \gg \Omega_C$ , имеем

$$i_{НЧ} = \frac{S_0 U_0}{2} m_H (1 + m_C \cos \Omega_C t). \quad (13.18)$$

Итак, если  $\omega_C - \omega_n \gg \Omega_C$ , нет прохождения помехи на выход СД.

## 13.4. Фазовое детектирование

### 13.4.1. Фазовое детектирование в параметрической системе

Синхронный детектор обладает еще одним ценным свойством. Из (13.15) следует, что детекторный эффект зависит от начальной фазы колебаний. Благодаря этому СД может быть использован для детектирования колебаний, модулированных по фазе (частоте).

В самом деле, пусть на СД (рис. 13.11), крутизна которого меняется по закону  $S(\omega_H t) = S_0(1 + m_H \cos \omega_H t)$ , где  $m_H = \Delta S/S_0$ ,

воздействует ФМ колебание  $U_C = U \cos\left[\omega_C t - \frac{\pi}{2} + \varphi(t)\right]$ , причем  $\varphi(t) \ll 1$ , т.е.

индекс модуляции мал. Если  $\omega_C = \omega_H$ , то так как  $i(t) = U_C S(\omega_H t)$ , после интегратора

$$i_{НЧ} = \frac{m_H S_0}{2} U \sin \varphi(t) \approx \frac{m_H S_0}{2} U \varphi(t) \quad (13.19)$$

Ток НЧ прямо пропорционален  $\varphi(t)$ , а, стало быть, изменяется по закону передаваемого сообщения.



### 13.4.2. Фазовое детектирование нелинейными каскадами

Работа фазовых детекторов может быть основана на эффекте нелинейного взаимодействия модулированного сигнала с немодулированным опорным колебанием, которое должно создаваться вспомогательным опорным генератором.

Пусть, например, к нелинейному безынерционному двухполюснику (рис. 13.13) с ВАХ вида  $i(U) = a_0 + a_1U + a_2U^2$  приложена сумма двух напряжений

$$U(t) = U_C + U_G = V_C \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] + V_G \cos \omega_0 t.$$

Из-за квадратичности характеристики составляющая тока взаимодействия "сигнал-гетеродин"

$$\begin{aligned} i_{\text{вз}}(t) &= 2a_2 V_C \cdot V_G \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \cdot \cos \omega_0 t = \\ &= a_2 V_C \cdot V_G \sin \varphi(t) + a_2 V_C \cdot V_G \sin[2\omega_0 t + \varphi(t)]. \end{aligned}$$

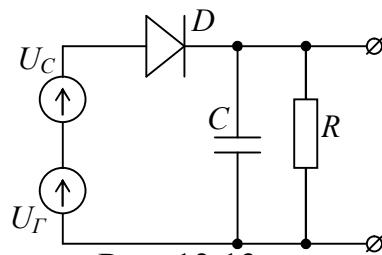


Рис. 13.13

После линейного НЧ фильтра (интегратора) имеем:

$$i_{\text{НЧ}}(t) = a_2 V_C \cdot V_G \sin \varphi(t) \approx a_2 V_C \cdot V_G \varphi(t) \quad (\text{при малом индексе модуляции}).$$

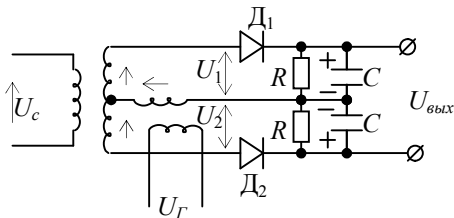


Рис. 13.14

Отметим, что здесь выходной эффект зависит от амплитуд сигнала и опорного колебания.

Для устранения влияния амплитуды сигнала на результат детектирования в режиме линейного детектирования можно использовать фазовый детектор суммарного и разностного сигналов (рис. 13.14).

$$U_C = V_C \cos[\omega_C t + \varphi(t)]; \quad U_G = V_G \cos \omega_G t.$$

$$\text{Напряжение на диоде } D_1 \quad U_1 = U_G + U_C.$$

$$\text{Напряжение на диоде } D_2 \quad U_2 = U_G - U_C.$$

$$U_{\text{вых}} \approx |U_1| - |U_2| = \sqrt{V_C^2 + V_G^2 + 2V_C V_G \cos \varphi} - \sqrt{V_C^2 + V_G^2 - 2V_C V_G \cos \varphi} =$$

$$= \sqrt{V_C^2 + V_G^2} \left( \sqrt{1 + \frac{2V_C V_G}{V_C^2 + V_G^2} \cos \varphi} - \sqrt{1 - \frac{2V_C V_G}{V_C^2 + V_G^2} \cos \varphi} \right).$$

Если  $V_C = V_G = V$ , то

$$U_{\text{вых}} = \sqrt{2}V \left( \sqrt{1 + \cos \varphi} - \sqrt{1 - \cos \varphi} \right) = 2V \left[ \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| - \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \right].$$



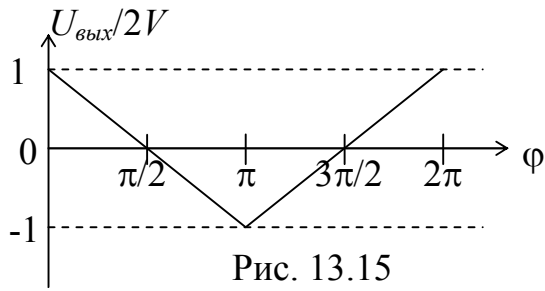


Рис. 13.15

Если  $V_C \gg V_I$ , то  $U_{\text{вых}} \approx 2V_I \cos \varphi$ , т.е. не зависит от амплитуды сигнала, но зависит от фазы.

### 13.5. Частотное детектирование

При частотной модуляции, как известно, полезное сообщение пропорционально отклонению мгновенной частоты сигнала от частоты несущего колебания.

При ЧМ детектирование обычно осуществляется в результате преобразования ЧМ  $\rightarrow$  АМ или ЧМ  $\rightarrow$  ФМ и последующего амплитудного или фазового детектирования.

Рассмотрим для примера частотное детектирование методом преобразования ЧМ  $\rightarrow$  АМ.

Учтем, что разложение АЧХ полосового фильтра имеет вид:

$$|K(j\omega)| = |K(j\omega_0)| + |K(j\omega_0)|'(\omega(t) - \omega_0) + \dots \quad (13.20)$$

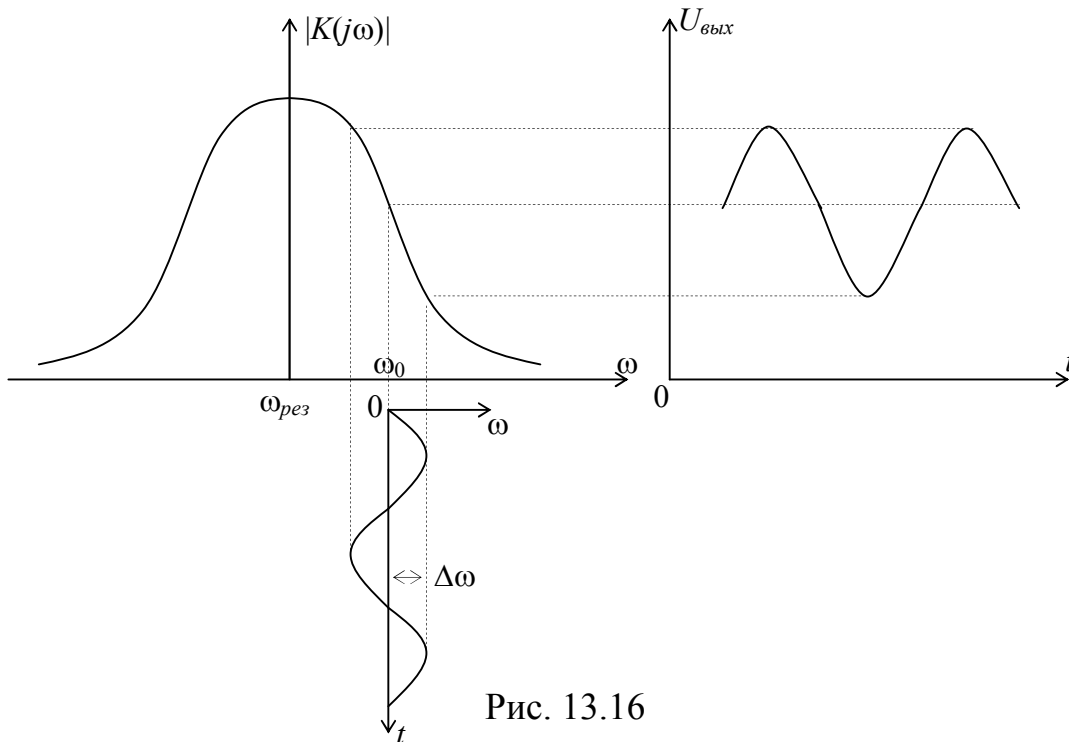


Рис. 13.16

Тогда можно ЧМ превратить в неглубокую АМ, подавая детектируемый сигнал на линейный частотный фильтр, настроенный таким образом, чтобы в



разложении АЧХ коэффициент  $|K(j\omega_0)|'$  (крутизна АЧХ в исходной точке) был максимален (середина линейного участка). Этот способ показан на рис. 13.16.

$$U_{\text{ex}}(t) = E_0 \cos[\omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t]t$$

Полагая, что  $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t$ , получим на выходе фильтра сигнал со сложной амплитудно-угловой модуляцией.

Мгновенная амплитуда переменной составляющей этого сигнала изменяется во времени по закону

$$V_{\text{вых}}(t) = b_0 |K(j\omega)|' \Delta\omega \cos \Omega t, \text{ где } b_0 - \text{ постоянный коэффициент.}$$

Окончательная обработка проводится обычным АМ детектором, включаемым на выходе фильтра  $|K(j\omega)|$ .

Этот метод имеет недостаток, обусловленный малым диапазоном линейности характеристики детектирования (скат частотной характеристики фильтра) и необходимостью настройки на частоту, отличную от частоты немодулированного колебания ( $\omega_{\text{рез}} \neq \omega_0$ ).

Для устранения этого недостатка совмещают в одной схеме два контура и два амплитудных детектора (рис. 13.17).

Здесь контур 1 настроен на частоту несколько большую, чем  $\omega_0$ , а контур 2, наоборот, на частоту немного меньшую, чем  $\omega_0$  (рис. 13.18-а).

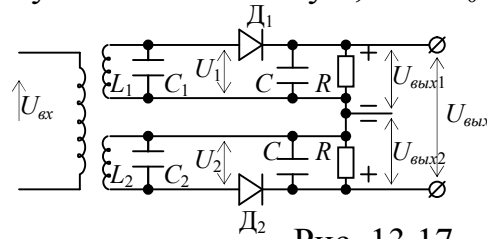
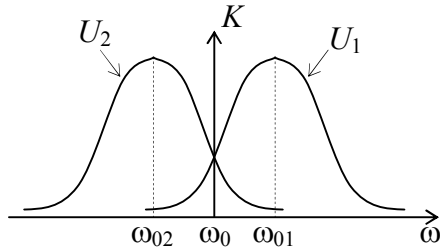
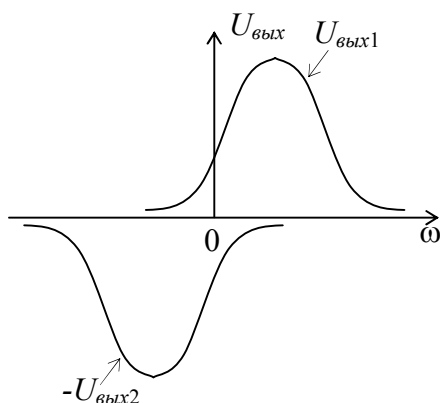


Рис. 13.17

Выпрямленные напряжения  $U_{\text{вых1}}$  и  $U_{\text{вых2}}$  пропорциональны (при неискаженном АМ детектировании) амплитудам  $U_1$  и  $U_2$ , но имеют противоположные полярности (рис. 13.17-б). Поэтому выходное напряжение  $U_{\text{вых}} = U_{\text{вых1}} - U_{\text{вых2}}$ . Результирующая детекторная характеристика  $U_{\text{вых}} = U_{\text{вых}}(\omega)$  приведена на рис. 13.18-в.



а)



б)



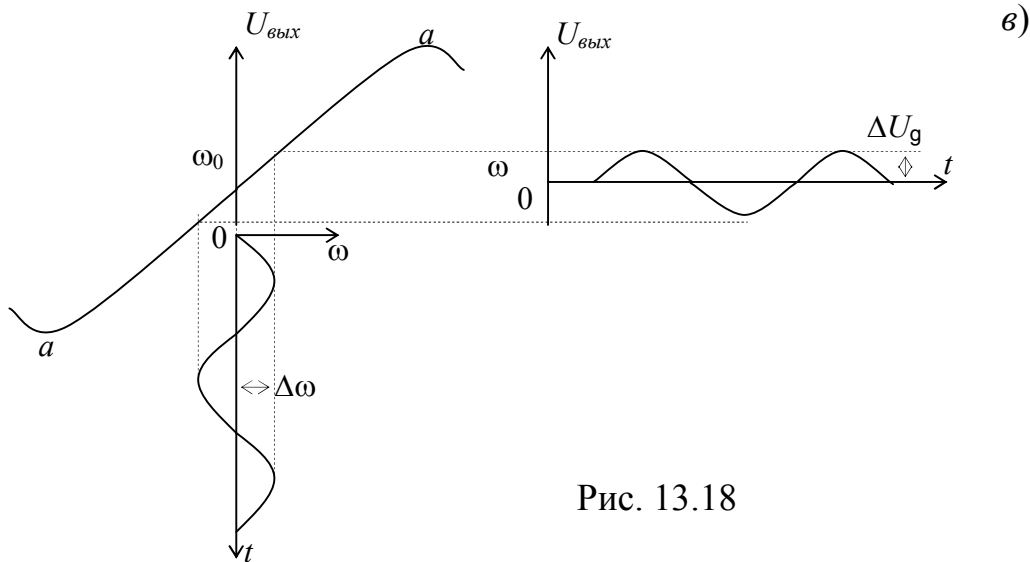


Рис. 13.18

Как видно из рис. 13.18-в эта характеристика имеет достаточно протяженный участок  $a-a$ , близкий к прямой линии.

## 14. Преобразование частоты

Задачей преобразования частоты является перенос спектра радиосигнала из одной области радиочастотного диапазона в другую. Сигнал преобразуется без изменения вида и параметров модуляции.

Для преобразования частоты требуется вспомогательное напряжение, при получении которого используется гетеродин.

Операция переноса спектра реализуется перемножением преобразуемого и гетеродинного колебаний различными способами. Причем процесс преобразования спектра может осуществляться как за счет нелинейного взаимодействия сигнала и гетеродина, так и за счет их параметрического взаимодействия. Более того, важен и способ подачи гетеродинного напряжения: на тот же вход четырехполюсника, что и сигнал, или же на гетеродинный вход шестиполюсника.

### 14.1. Преобразование спектра в нелинейном шестиполюснике

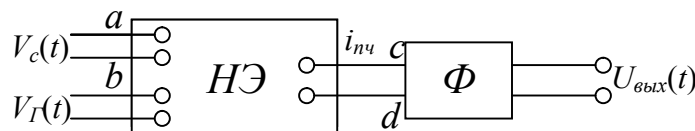


Рис. 14.1

Пусть на некоторый нелинейный шестиполюсник воздействует напряжение сигнала  $V_c(t)$ , спектр которого состоит из частот  $\omega_{c1}, \omega_{c2}, \dots, \omega_{cn}$  и гармоническое напряжение  $V_T(t)$ , полученное от гетеродина.

В отличие от амплитудной модуляции, где частоты воздействующих напряжений резко различны ( $\omega_0 \gg \Omega_M$ ), теперь будем полагать, что частота



гетеродина  $\omega_{\Gamma}$  мало отличается от любой из частот сигнала  $\omega_{CK}$ , т.е.  $\omega_{CK} = \omega_{\Gamma} + \Delta\omega$ , где  $\Delta\omega \ll \omega_{\Gamma}$ .

Напряжение на выходе нелинейного элемента содержит множество колебаний различных частот (см. раздел 8). Ток преобразователя  $i$  определяется статической характеристикой нелинейного элемента, режимом его работы (т.е. постоянным напряжением смещения) и величинами напряжений сигнала  $V_C$ , гетеродина  $V_{\Gamma}$  и промежуточной частоты  $V_{пч}$ .

Ток преобразователя можно записать в виде степенного ряда по малым переменным  $V_C$  и  $V_{пч}$ :

$$i = f(V_{\Gamma}) + \frac{\partial f(V_{\Gamma})}{\partial V_C} V_C + \frac{\partial f(V_{\Gamma})}{\partial V_{пч}} V_{пч} + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(V_{\Gamma})}{\partial V_C^2} V_C^2 + 2 \frac{\partial^2 f(V_{\Gamma})}{\partial V_C \partial V_{пч}} V_C V_{пч} + \frac{\partial^2 f(V_{\Gamma})}{\partial V_{пч}^2} V_{пч}^2 \right] + \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 f(V_{\Gamma})}{\partial V_C^3} V_C^3 + \dots \right] \quad (14.1)$$

#### 14.1.1. Прямое преобразование (линейное приближение)

Производные, являющиеся коэффициентами ряда (14.1) определяются при  $V_C = V_{пч} = 0$ , т.е. при наличии лишь напряжения гетеродина. Т.к. обычно  $V_C \ll V_{\Gamma}$ ,  $V_{пч} \ll V_{\Gamma}$ , то при анализе можно не учитывать члены разложения выше первого. Введем следующие обозначения:

- ток преобразователя при действии только напряжения от гетеродина и постоянных напряжений  $i_{\Gamma} = f(V_{\Gamma})$ ;
- крутизна тока по напряжению сигнала  $S = \frac{df(V_{\Gamma})}{dV_C}$ ;
- выходная проводимость преобразователя  $g_i = \frac{1}{R_i} = \frac{\partial i}{\partial V_{пч}} = \frac{\partial f(V_{\Gamma})}{\partial V_{пч}}$ .

В результате выражение (14.1) примет, если ограничиться первыми тремя членами ряда, следующий вид:

$$i = i_{\Gamma} + S(V_{\Gamma})V_C + g_i(V_{\Gamma})V_{пч} \quad (14.2)$$

Если напряжение гетеродина является четной периодической функцией  $V_{\Gamma} = U_{\Gamma} \cos \omega_{\Gamma} t$ , то и коэффициенты ряда (14.2) будут четными периодическими функциями времени с частотой гетеродина:

$$\begin{aligned} i_{\Gamma} &= \sum_{k=0}^{\infty} I_{\Gamma k} \cos k\omega_{\Gamma} t, \\ S &= \sum_{k=0}^{\infty} S_k \cos k\omega_{\Gamma} t, \\ g_i &= \sum_{k=0}^{\infty} G_{ik} \cos k\omega_{\Gamma} t. \end{aligned} \quad (14.3)$$

На рис. 14.2 для примера показано изменение крутизны транзисторного преобразователя частоты при гармоническом напряжении гетеродина.



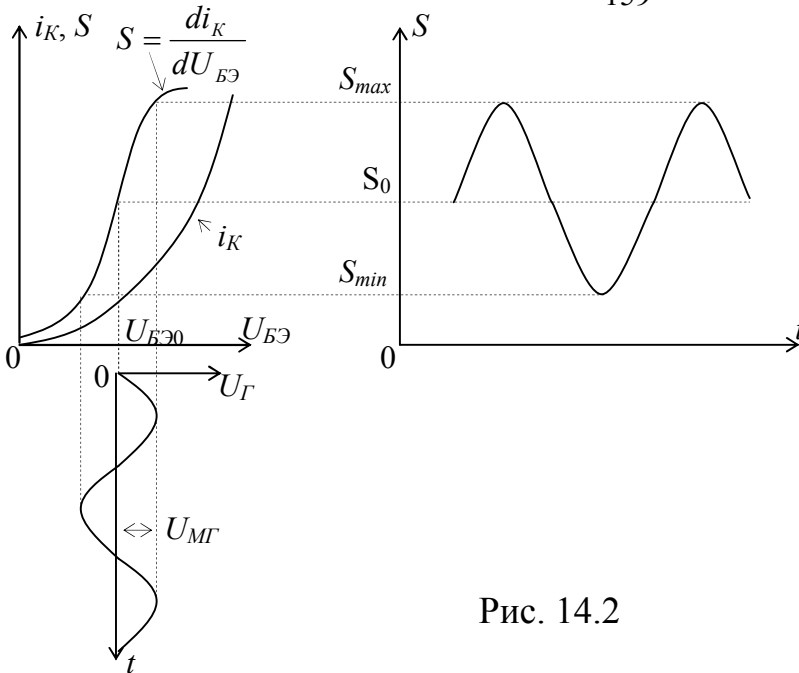


Рис. 14.2

Как видно из рис. 14.2, крутизна является периодической функцией времени, причем может изменяться не только по синусоидальному закону, но и содержать более высокие гармоники гетеродинного напряжения

$$S = S_0 + S_1 \cos \omega_{\Gamma} t + S_2 \cos 2\omega_{\Gamma} t + \dots$$

Гармоники крутизны появляются при увеличении напряжения гетеродина. Однако, одновременно с этим обычно возрастает крутизна преобразования, а главное, она меньше зависит от изменения амплитуды гетеродинного напряжения.

Следует отметить, что рассмотренное нелинейное преобразование можно, как видно из (14.2), представить как параметрическое для малых сигналов, где изменяемым параметром является крутизна  $S(U_{\Gamma})$ .

Уравнение (14.2) соответствует линейному режиму (по сигналу) преобразователя и позволяет выяснить все основные свойства ПЧ, за исключением нелинейных искажений, которые определяются членами ряда (14.1) с  $V_C^2$  и  $V_C^3$ .

Пусть на вход преобразователя действует напряжение  $V_C = U_C \cos \omega_C t$ .

Будем считать, что на резонансной нагрузке преобразователя не будет создаваться заметного напряжения каких-либо частот, не совпадающих с промежуточной частотой. Причем  $V_{ПЧ} = U_{ПЧ} \cos(\omega_{np} t - \varphi_{np})$ . Учитывая (14.3), из (14.2) имеем:

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} I_{\Gamma k} \cos k\omega_{\Gamma} t + \sum_{k=0}^{\infty} S_k U_C \cos k\omega_{\Gamma} t \cos \omega_C t + \sum_{k=0}^{\infty} G_{ik} U_{ПЧ} \cos k\omega_{\Gamma} t \cdot \cos(\omega_{np} t - \varphi_{np}). \quad (14.4)$$

Из этого выражения видно, что ток преобразователя содержит составляющие различных частот. Составляющие тока с промежуточной частотой содержат второе слагаемое (14.4)  $\omega_{np} = k\omega_{\Gamma} \pm \omega_C$ , (при определенном значении  $k$ ) и третье слагаемое при  $k=0$ .



Таким образом, ток промежуточной частоты равен

$$i_{ПЧ} = \frac{1}{2} S_k U_C \cos(k\omega_{Г} \pm \omega_C) t + G_{i0} U_{ПЧ} \cos(\omega_{np} t - \varphi_{np}). \quad (14.5)$$

Промежуточная частота может иметь следующее значение:

$\omega_{np} = k\omega_{Г} + \omega_C - (k\omega_{Г} < \omega_{np})$  - повышение частоты,

$\omega_{np} = k\omega_{Г} - \omega_C - (k\omega_{Г} > \omega_C)$  - понижение частоты,

$\omega_{np} = \omega_C - k\omega_{Г} - (k\omega_{Г} < \omega_C)$  - понижение частоты, ( $k=1, 2, \dots$ ).

Таким образом, промежуточная частота может получаться с использованием различных гармоник гетеродина. Выражение (14.5) в комплексной форме

$$\dot{I}_{ПЧ} = \frac{1}{2} S_k (U_{Г}) \dot{U}_C + G_{i0} \dot{U}_{ПЧ}. \quad (14.6)$$

Здесь первое слагаемое обусловлено эффектом преобразования частоты, а второе – реакцией нагрузки, включенной на выходе преобразователя с нелинейным элементом, т.е. напряжение промежуточной частоты, приложенное к выходу преобразователя (точки  $cd$ ), вызывает появление напряжения частоты сигнала на вход преобразователя (точки  $ab$ ) (см. рис. 14.1).

Эффект обратного преобразования является, по существу, эффектом обратной связи, замыкающейся через нелинейность преобразователя.

#### 14.1.2. Коэффициент передачи преобразователя частоты

По аналогии с усилительным каскадом, рассмотрим упрощенную эквивалентную схему преобразователя частоты.

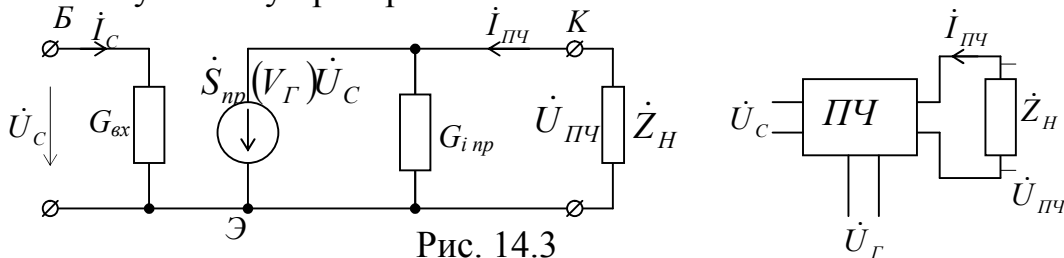


Рис. 14.3

$$\text{По определению } \dot{K}_{np} = \frac{\dot{U}_{ПЧ}}{\dot{U}_C} \quad (14.7)$$

При диодном преобразовании  $|\dot{K}_{np}| < 1$ , при транзисторном (ламповом) преобразовании  $|\dot{K}_{np}| \geq 1$ .

$$\dot{U}_{ПЧ} = -\dot{I}_{ПЧ} \dot{Z}_H, \text{ т.е. } \dot{I}_{ПЧ} = -\frac{\dot{U}_{ПЧ}}{\dot{Z}_H}.$$

Отсюда, подставив  $\dot{I}_{ПЧ}$  в уравнение (14.6),  $\dot{I}_{ПЧ} = S_{np} \cdot \dot{U}_C + \frac{1}{R_{inp}} \cdot \dot{U}_{ПЧ}$ ,

$$\text{имеем: } -\frac{\dot{U}_{ПЧ}}{\dot{Z}_H} = S_{np} \dot{U}_C + \frac{1}{R_{inp}} \dot{U}_{ПЧ}; \text{ или } \dot{U}_{ПЧ} = \frac{-\dot{S}_{np} \dot{U}_C \dot{Z}_H R_{inp}}{\dot{Z}_H + R_{inp}}.$$



Т.к. коэффициент передачи четырехполюсника  $\dot{K}_{np} = \frac{\dot{U}_{ПЧ}}{\dot{U}_C}$ , то

$$\dot{K}_{np} = -S_{np} \cdot \frac{\dot{Z}_H R_{inp}}{\dot{Z}_H + R_{inp}} = -S_{np} \frac{\dot{Z}_H}{1 + \frac{\dot{Z}_H}{R_{inp}}}. \quad (14.8)$$

Учитывая, что крутизна преобразования зависит от номера гармоники гетеродина, в выражении (14.8)  $S_{np} = \frac{1}{2} S_k$ , где  $k$  номер гармоники. Зависимость импеданса  $|\dot{Z}_H|$  нагрузки приведена на рис. 14.4.

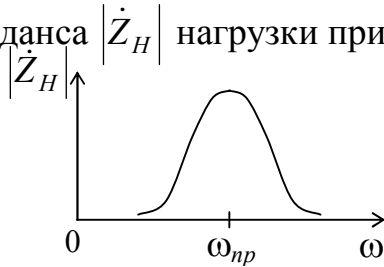


Рис. 14.4

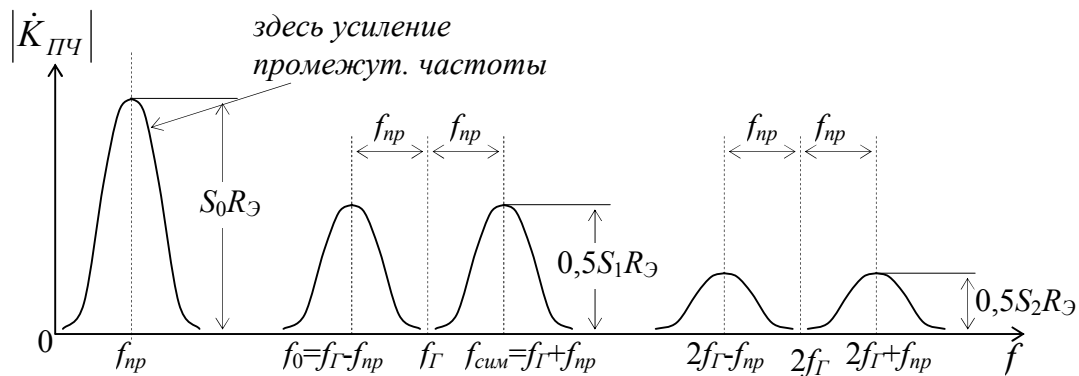


Рис. 14.5

На рис. 14.5 приведена частотная характеристика преобразователя, показывающая зависимость коэффициента передачи от частоты.

Здесь  $R_{\mathcal{E}} = \frac{R_H R_{inp}}{R_H + R_{inp}}$ , т.к. при резонансе  $\dot{Z}_H = R_H$ .

### 14.1.3. Дополнительные каналы и интерференционные искажения при преобразовании частоты

Из рис. 14.5 видно, что преобразователь частоты отзывается на напряжения целого ряда различных частот, при которых частота напряжения на выходе преобразователя находится в полосе пропускания выходного колебательного контура. Эти особенности преобразователя объясняются тем, что напряжение на выходе получается различными путями за счет использования различных составляющих периодически изменяющейся крутизны нелинейного элемента. Так, например, сигнал с частотой  $f_{np}$  проходит через преобразователь за счет



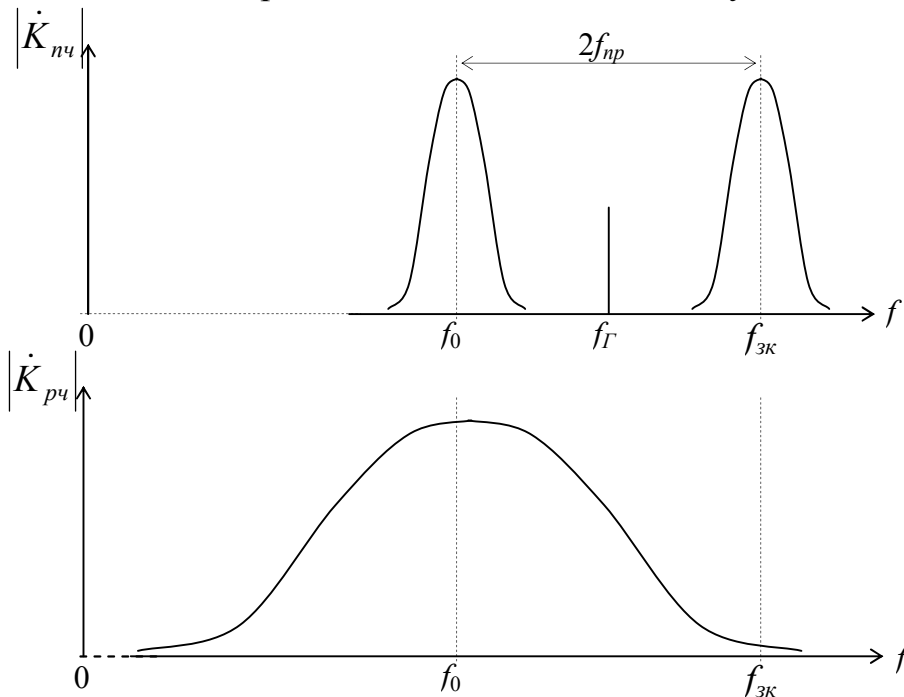
использования постоянной составляющей крутизны  $S_0$ . Для этого сигнала преобразователь ведет себя как усилитель.

Сигналы с частотами  $f_{\Gamma} \pm f_{np}$  принимаются за счет использования первой гармоники крутизны. Сигналы с частотами  $2f_{\Gamma} \pm f_{np}$  принимаются за счет использования второй гармоники крутизны и т.д.

Свойства преобразователя допускают, таким образом, одновременное усиление в усилителе промежуточной частоты (УПЧ) сигналов из различных каналов.

Чаще всего для приема сигнала используют канал с частотой  $f_0 = f_{\Gamma} - f_{np}$ , который в этом случае является основным. Остальные каналы – паразитные. Канал  $f_{сим} = f_{\Gamma} + f_{np}$  – зеркальный. Канал с частотой  $f_{np}$  называют каналом промежуточной частоты.

Для уменьшения вредного влияния мешающих станций нужно стремиться к тому, чтобы коэффициент передачи по дополнительным каналам был мал. С этой целью режим преобразования выбирают так, чтобы крутизна преобразования для дополнительных сигналов была мала. Таким путем можно уменьшить действие любого паразитного канала, кроме зеркального (поскольку крутизна преобразования для этого канала такая же, как для основного) и канала промежуточной частоты. Единственным способом ослабления этих каналов является включение до преобразователя частотно-избирательных систем, которые уменьшали бы напряжение сигналов соответствующих частот.



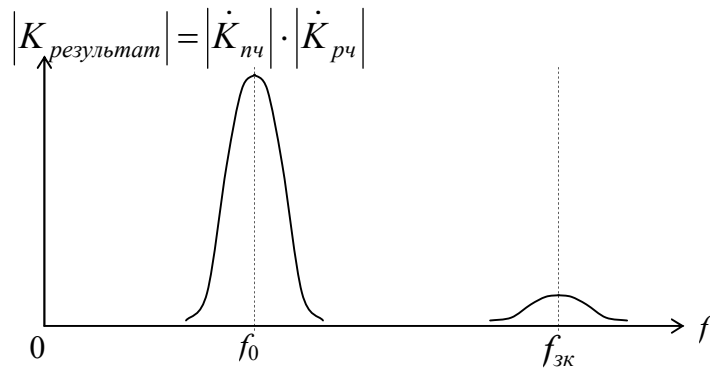


Рис. 14.6

На рис. 14.6 показано действие преселектора, уменьшающее влияние зеркального канала и канала промежуточной частоты.

#### 14.1.4. Комбинационные частоты при преобразовании частоты (нелинейный режим по сигналу)

Выясним особенности работы преобразователя частоты в том случае, когда ток преобразователя нелинейно зависит от входного сигнала  $V_C$ . Для этого воспользуемся выражением (14.1) с учетом нелинейных членов (по сигналу). Тогда получим

$$i = i_{\Gamma} + S_{np}V_C + g_i V_{ПЧ} + \frac{1}{2!} [\bar{S}_1 V_C^2 + 2\bar{S}_2 V_C V_{ПЧ} + \bar{g}_i V_{ПЧ}^2] + \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial V_C^3} V_C^3 + \dots \right], \quad (14.9)$$

где  $\bar{S}_1 = \frac{\partial^2 f(V_{\Gamma})}{\partial V_C^2} = \frac{\partial S_{np}}{\partial V_C}$ ;  $\bar{S}_2 = \frac{\partial^2 f(V_{\Gamma})}{\partial V_C \partial V_{ПЧ}} = \frac{\partial S_{np}}{\partial V_{ПЧ}}$ ;  $\bar{g}_i = \frac{\partial^2 f(V_{\Gamma})}{\partial V_{ПЧ}^2} = \frac{\partial g_i}{\partial V_{ПЧ}}$ .

При изменении напряжения гетеродина по закону  $V_{\Gamma} = U_{\Gamma} \cos \omega_{\Gamma} t$  все коэффициенты меняются периодически с угловой частотой  $\omega_{\Gamma}$ , т.е.

$$\bar{S}_1 = \sum_{K=0}^{\infty} \bar{S}_{1K} \cos k\omega_{\Gamma} t \text{ и т.д.} \quad (14.10)$$

Проведя подстановку (14.10) в (14.9) после преобразований имеем набор комбинационных частот  $k\omega_{\Gamma} \pm m\omega_C$ , где  $k=0,1,2,\dots, m=1,2,3,\dots$

Напряжение на выходе ПЧ будет создаваться компонентами, соответствующими следующим условиям:

$$\begin{aligned} \omega_{np} &= k\omega_{\Gamma} + m\omega_C - \text{при } k\omega_{\Gamma} < \omega_{np}; \\ \omega_{np} &= k\omega_{\Gamma} - m\omega_C - \text{при } k\omega_{\Gamma} > m\omega_C; \\ \omega_{np} &= m\omega_C - k\omega_{\Gamma} - \text{при } k\omega_{\Gamma} < m\omega_C. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Условием резонанса является равенство промежуточной частоты  $\omega_{np}$  резонансной частоте промежуточного контура. Из (14.11) найдем  $\omega_C = \omega_{рез}$  — частоты сигнала, при которых есть резонанс.

$$\omega_{рез} = \omega_C = \frac{k\omega_{\Gamma} \pm \omega_{np}}{m} \quad (14.12)$$



Коэффициент  $k$  определяет соответственно номер гармоники крутизны, а коэффициент  $m$  степень нелинейности, вследствие которых получился дополнительный канал.

Если  $m=1$ , получаем выражение, соответствующее линейному (по сигналу) выражению. Из (14.12) видно, что количество частот, при которых имеет место резонанс, увеличивается при наличии нелинейности по сигналу (коэффициент  $m=2, 3, \dots$ ). Это приводит к увеличению числа дополнительных каналов и создает возможность интерференционных искажений в случае совпадения частот основного и дополнительного каналов.

При выделении разностной частоты структура сигнала сохранится лишь в том случае, когда  $\omega_c > k\omega_r$ , если же  $\omega_c < k\omega_r$ , то спектр сигнала «переворачивается» потому, что более высокой частоте сигнала соответствует более низкая разностная частота. При преобразовании частоты обычного АМ сигнала, спектр которого состоит из двух симметричных относительно  $\omega_0$  боковых полос, переворачивание спектра внешне никак не проявляется; просто верхняя и нижняя боковые полосы меняются местами. Преобразование же ЧМ колебания, мгновенная частота которого  $\omega_c = \omega_0 + \Delta\omega t$ , при  $\omega_r > \omega_c$  приводит к изменению мгновенной частоты выходного сигнала по закону  $|\omega_c - \omega_r| = \omega_r - \omega_0 - \Delta\omega(t)$ , т.е. к изменению знака перед отклонением частоты  $\Delta\omega(t)$ .

## 14.2. Техническая реализация преобразователя частоты

Приведем некоторые варианты реализации параметрического преобразования частоты, как с использованием линейного параметрического каскада (рис. 14.7), так и с использованием нелинейного каскада, работающего в параметрическом режиме (рис. 14.8 и 14.9).

а) преобразователь частоты на параметрическом каскаде

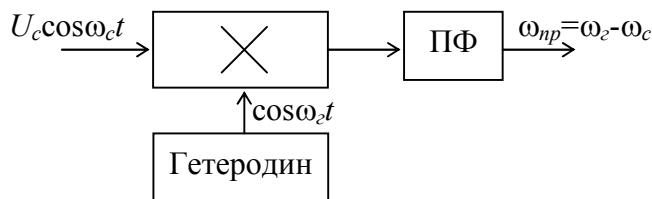


Рис. 14.7

б) Преобразователь частоты на диоде

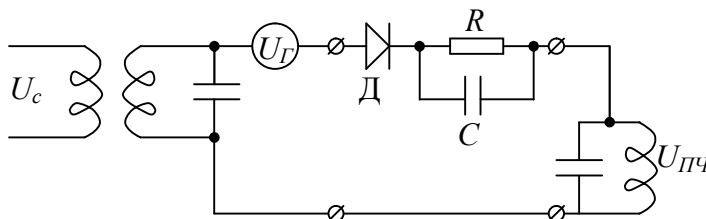


Рис. 14.8



## в) Преобразователь частоты на полевом транзисторе с двумя затворами

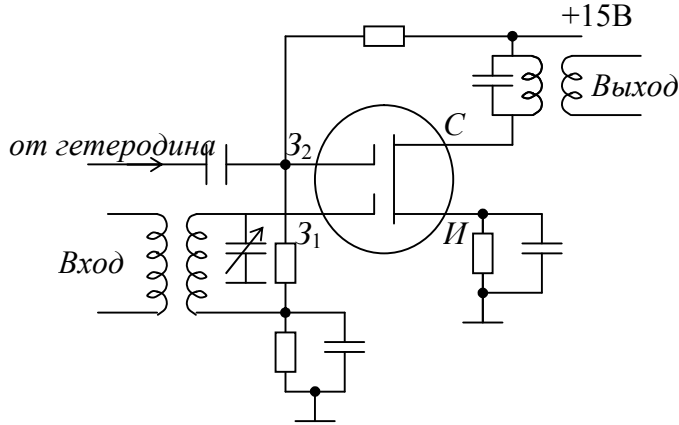


Рис. 14.9

В изображенном на рис. 14.9 преобразователе, сигнальное напряжение подается на первый, а гетеродинное - на второй затворы. Здесь гетеродинное напряжение на втором затворе меняет крутизну транзистора

$$S = S_0 + S_{m1} \cos \omega_{\Gamma} t.$$

При подаче напряжения сигнала  $U_c = U_{mc} \cos \omega_c t$

Переменная составляющая выходного тока

$$i = S(t)U_c = S_0 U_{mc} \cos \omega_c t + \frac{S_{m1}}{2} U_{mc} \cos(\omega_{\Gamma} - \omega_c) t + \frac{S_{m1}}{2} U_{mc} \cos(\omega_{\Gamma} + \omega_c) t.$$

Если  $f_{ПЧ} = f_{\Gamma} - f_c$ , то  $U_{вых} = K \frac{S_{m1}}{2} U_{mc} \cos(\omega_{\Gamma} - \omega_c) t$ .

Здесь фактически имеет место параметрическое преобразование частоты.

### Заключение

Достигнутые успехи радиоэлектроники во многом базируются на результатах исследований в радиофизике и электронике. Отметим некоторые важнейшие направления развития современной радиоэлектроники:

- создание методами нанотехнологии новых электронных приборов и интегральных микросхем;
- техническая реализация оптимальных методов приема и обработки сигналов;
- переход на использование сверхшироких шумоподобных сигналов;
- широкое внедрение цифровых методов кодирования, модуляции и демодуляции;
- разработка и внедрение программируемых логических интегральных схем;
- освоение микроволнового и оптического диапазонов длин волн;
- комплексирование радиоэлектронных устройств и персональных компьютеров.

В курсе лекций «Основы радиоэлектроники» сделана попытка, используя хорошо известные монографии и учебные пособия, предложить студентам базовые сведения о сигналах, радиоэлектронных цепях и радиотехнических



каскадах. Отметим, что этот курс фактически посвящен теоретическим основам радиотехники и базируется на известных студентам законах физики, методах математического и векторного анализа. Большое внимание в курсе уделено основам параметрических и нелинейных цепей, методам их описания и основным свойствам этих цепей при воздействии на них нескольких сигналов.

Это пособие, конечно, не ставит цель дать полное изложение основ радиоэлектроники. В нем рассмотрены основы аналоговой радиоэлектроники, имея в виду, что продолжением этого курса является курс «Цифровая радиоэлектроника и микропроцессорная техника». Однако, есть надежда, что оно послужит фундаментом для изучения дополнительной литературы по теории сигналов и цепей. Более того, пособие может помочь студентам в изучении других дисциплин по специальностям «Радиофизика и электроника» и «Информационные системы в радиофизике и телекоммуникациях».

### Список рекомендуемой литературы

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. –М.: Высш. школа, 1988.- 448 с.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. –М.: Радио и связь, 1986. - 512 с.
3. Зернов М.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. –Л.: Энергия, 1965.- 890 с.
4. Зиновьев А.Л., Филиппов Л.И. Введение в теорию сигналов и цепей. – М.:Высш.школа, 1968.-280 с.
5. Заездный А.М., Кушнир В.Ф., Ферсман Б.А. Теория нелинейных электрических цепей. –М.:Связь, 1968.-400 с.
6. Белецкий А.Ф. Основы теории линейных электрических цепей. –М.: Связь, 1967.-608 с.
7. Нефедов В.И. Основы радиоэлектроники и связи: Учебник для вузов. – М.:Высшая школа, 2002.- 510 с.
8. Ногин В.Н. Аналоговые электронные устройства: Учебное пособие для вузов. –М.:Радио и связь, 1992.- 304 с.
9. Радиотехнические цепи и сигналы. Задачи и задания: Учебное пособие/под ред. А.Н. Яковлева. –М.:ИНФРА-М; Новосибирск, изд. НГТУ, 2003.- 348 с.
10. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы.Руководство к решению задач: Учебное пособие. –М.:Высш.школа, 2002.- 214 с.
11. Джонс М.Х. Электроника – практический курс. –М.:Постмаркет, 1999.- 528 с.
12. Манаев Е.И. Основы радиоэлектроники. –М.:Радио и связь, 1990.- 512 с.
13. Орлов И.Я. Курс лекций по основам радиоэлектроники. – Н.Новгород: Издательство ННГУ, 2005, 168с.



## Оглавление

|  |    |
|--|----|
| Введение   | 3  |
| I. Введение в теорию радиотехнических сигналов   | 4  |
| 1. Классификация радиотехнических сигналов   | 4  |
| 2. Спектральное представление сигналов   | 6  |
| 2.1. Ортогональные сигналы   | 6  |
| 2.2. Обобщенный ряд Фурье  | 8  |
| 2.3. Периодические сигналы и ряды Фурье  | 9  |
| 2.3.1. Тригонометрическая форма ряда Фурье   | 10 |
| 2.3.2. Комплексная форма ряда Фурье  | 12 |
| 2.4. Спектральное представление непериодических сигналов                                     | 13 |
| 2.4.1. Основные свойства преобразований Фурье  | 16 |
| 2.4.2. Спектральная плотность некоторых<br>неинтегрируемых сигналов                          | 20 |
| 2.5. Спектральная плотность периодического сигнала   | 22 |
| 3. Дискретизация сигнала   | 23 |
| 3.1. Ортогональные сигналы с ограниченным спектром   | 23 |
| 3.2. Теорема Котельникова для сигнала с ограниченным<br>спектром                             | 25 |
| 3.3. Спектр дискретизированного сигнала  | 26 |
| 4. Модулированные сигналы и их спектры   | 27 |
| 4.1. Сигналы с АМ  | 27 |
| 4.1.1. Балансная амплитудная модуляция<br>(подавленная несущая)                              | 29 |
| 4.1.2. Однополосная амплитудная модуляция (ОБП)  | 30 |
| 4.2. Сигналы с угловой модуляцией  | 31 |
| 4.2.1. Фазовая модуляция (ФМ)  | 31 |
| 4.2.2. Частотная модуляция (ЧМ)  | 31 |
| 4.2.3. Общие соображения о спектре сигналов с<br>угловой модуляцией                          | 33 |
| 4.2.4. Спектральное разложение ЧМ и ФМ сигналов<br>при малых индексах модуляции              | 33 |
| 4.2.5. Спектр сигнала с угловой модуляцией при<br>произвольном значении индекса модуляции    | 34 |
| 4.3. Дискретизация узкополосного сигнала<br>(теорема Котельникова для узкополосного сигнала) | 36 |
| II. Основы теории радиотехнических цепей   | 38 |
| 5. Классификация и описание цепей  | 38 |
| 5.1. Классификация цепей   | 38 |
| 5.2. Методы математического описания линейных цепей  | 39 |
| 5.2.1. Элементы электрических цепей  | 39 |
| 5.2.2. Метод контурных токов   | 40 |
| 5.2.3. Временной метод анализа линейных<br>стационарных цепей                                | 43 |
| 5.2.4. Спектральный метод анализа линейных   |    |



|   |     |
|---|-----|
| стационарных цепей  | 47  |
| 5.2.5. Понятие комплексной частоты  | 47  |
| 5.2.6. Представление сигналов на плоскости комплексной частоты                        | 48  |
| 6. Линейная фильтрация  | 51  |
| 6.1. Условия физической реализуемости линейных четырехполюсников                      | 52  |
| 6.2. Фильтры нижних и верхних частот  | 53  |
| 6.2.1. ФНЧ (фильтр нижних частот)   | 53  |
| 6.2.2. ФВЧ (фильтр верхних частот)  | 56  |
| 6.3. Полосовая фильтрация   | 57  |
| 6.4. Условия безыскаженной передачи сигнала через электрическую цепь                  | 66  |
| 7. Линейные цепи с переменными параметрами  | 67  |
| 7.1. Линейные параметрические двухполюсники   | 67  |
| 7.2. Линейный параметрический четырехполюсник   | 68  |
| 8. Введение в теорию нелинейных цепей   | 71  |
| 8.1. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов                                 | 71  |
| 8.2. Нелинейное преобразование спектра сигнала  | 73  |
| 8.3. Нелинейные искажения   | 74  |
| 8.4. Безынерционное нелинейное преобразование суммы гармонических колебаний           | 76  |
| 8.4.1. Комбинационные частоты   | 76  |
| 8.4.2. Эффект интермодуляции  | 77  |
| 8.4.3. Подавление сигнала на нелинейности   | 77  |
| 8.4.4. Совместное воздействие на нелинейный элемент сигналов большой и малой амплитуд | 77  |
| 8.5. Выводы   | 78  |
| III. Радиоэлектронные устройства  | 79  |
| 9. Усиление сигналов  | 79  |
| 9.1. Общие сведения об усилителях   | 79  |
| 9.2. АЧХ и ФЧХ усилителя  | 81  |
| 9.3. Переходные характеристики и переходные искажения                                 | 84  |
| 9.4. Устойчивость линейных цепей  | 85  |
| 9.4.1. Передаточная функция линейной системы с обратной связью                        | 85  |
| 9.4.2. Устойчивость цепей с ОС. Критерий Найквиста.                                   | 86  |
| 9.4.3. Способы включения ОС   | 89  |
| 10. Усилительные устройства   | 92  |
| 10.1. Транзисторный усилитель   | 92  |
| 10.2. Аперiodический усилитель (резистивный каскад)                                   | 97  |
| 10.3. Усилитель постоянного тока (УПТ)  | 107 |
| 10.4. Дифференциальный усилитель (ДУ)   | 107 |
| 10.5. Операционные усилители (ОУ)   | 111 |
| 10.6. Частотно-избирательные усилители  | 115 |



|  |     |
|--|-----|
| 10.7. Параметрическое усиление сигналов  | 121 |
| 11. Автогенераторы гармонических колебаний   | 124 |
| 11.1. Обобщенная схема автогенератора. Баланс амплитуд и баланс фаз в стационарном режиме автогенератора | 124 |
| 11.2. Самовозбуждение простейшего автогенератора (линейное приближение)                                  | 127 |
| 11.3. Стационарный режим автогенератора (квазилинейное приближение). Понятие "средняя крутизна"          | 129 |
| 11.4. Виды возбуждения автогенератора  | 131 |
| 11.5. КПД автогенератора и оптимизация режима запуска  | 134 |
| 12. Принципы получения модулированных колебаний  | 137 |
| 12.1. Получение амплитудной модуляции с применением нелинейных каскадов                                  | 137 |
| 12.2. Модуляция в параметрических цепях  | 139 |
| 12.3. Техническая реализация амплитудной модуляции   | 141 |
| 12.4. Частотная модуляция (ЧМ) в автогенераторе  | 142 |
| 12.5. Фазовая модуляция  | 143 |
| 13. Детектирование сигналов  | 144 |
| 13.1. Амплитудное детектирование (постановка задачи)   | 144 |
| 13.2. Амплитудное детектирование нелинейными цепями  | 145 |
| 13.3. Амплитудное детектирование в параметрических цепях   | 151 |
| 13.4. Фазовое детектирование   | 153 |
| 13.5. Частотное детектирование   | 155 |
| 14. Преобразование частоты   | 157 |
| 14.1. Преобразование спектра в нелинейном шестиполюснике   | 157 |
| 14.2. Техническая реализация преобразователя частоты   | 164 |
| Заключение   | 165 |
| Список рекомендуемой литературы  | 166 |

