

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Тверской государственный технический университет»  
(ТвГТУ)

Кафедра «Техническая механика»

**О.В. Дорогов**

# **Структура и кинематика цилиндрических зубчатых механизмов**

Методические указания для студентов,  
выполняющих курсовые работы и проекты по дисциплинам  
«Теория механизмов и машин», «Прикладная механика», «Механика»

Тверь 2024



УДК 531.8 (075.8)

ББК 34.412я7

Рецензент – доцент кафедры МПРМ ТвГТУ к.т.н. Морозихина И.К.

Дорогов О.В. Структура и кинематика цилиндрических зубчатых механизмов: метод. указания. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2024. 44 с.

Приведены сведения о структуре и кинематике элементарных и сложных зубчатых механизмов. Изложены основные теоретические положения структурного и кинематического анализа зубчатых механизмов. На конкретных примерах даны рекомендации по выполнению кинематического анализа сложных цилиндрических зубчатых механизмов аналитически и графоаналитически.

Ориентированы на студентов, выполняющих курсовые работы и проекты по дисциплинам «Теория механизмов и машин», «Прикладная механика», «Механика».

Рассмотрены на заседании кафедры «Техническая механика» и рекомендованы к изданию (протокол № 3 от 23.01.2024).

© Тверской государственный  
технический университет, 2024  
© Дорогов О.В., 2024



## ВВЕДЕНИЕ

Анализ структуры и кинематики является одним из важнейших вопросов изучения зубчатых механизмов.

*Зубчатым* называется механизм с высшей кинематической парой, в структуру которого входят зубчатые колёса (звенья, снабженные специальными выступами - зубьями).

Наиболее широкое распространение получили *цилиндрические* и *конические* зубчатые колёса.

В зависимости от особенностей структуры, все зубчатые механизмы подразделяются на два вида: *простые* и *сложные*.

*Простой (элементарный) зубчатый механизм* состоит из стойки и двух подвижных звеньев, которые называются зубчатыми колесами. *Сложный зубчатый механизм* образован числом зубчатых колес больше двух.

Пара зубчатых колёс находящихся в зацеплении называется *ступенью*. По такому принципу *простой зубчатый механизм* можно рассматривать как *одноступенчатый*, а *сложные* зубчатые механизмы классифицировать на *двух-, трёх- и многоступенчатые*.

Классификация зубчатых механизмов подробно рассмотрена в работах [3-4]. В данной работе рассматриваются *простые* и *сложные* плоские механизмы образованные цилиндрическими прямозубыми колёсами с параллельными осями вращения и эвольвентным профилем зуба. Сведения о геометрии и закон зубчатого зацепления для таких колёс изложены в работах [2-4].

Анализ структуры зубчатых механизмов включает в себя изучение их строения, а также определение числа степеней свободы.

Кинематическому анализу зубчатых механизмов предшествует их синтез, который включает в себя определение чисел зубьев колёс. Вопросы синтеза зубчатых механизмов рассмотрены в работах [1], [3-4].

Главным вопросом кинематики зубчатых механизмов является определение передаточных отношений. Причём передаточное отношение может определяться для всего механизма так и для каждой его ступени. Также решение задач кинематики зубчатых механизмов может включать в себя определение частот вращения (или угловых скоростей) зубчатых колёс и окружных скоростей характерных точек. Обычно такими точками являются центры кинематических пар.

Кинематические параметры зубчатых механизмов могут определяться аналитически или графоаналитически. Графоаналитический метод широко применяется для планетарных и дифференциальных зубчатых механизмов.

В данной методической разработке излагаются основные теоретические положения структуры и кинематики простых и сложных цилиндрических зубчатых механизмов. Также на конкретных примерах рассматривается решение задач кинематического анализа сложных зубчатых механизмов различной структуры.



# 1. СТРУКТУРА И КИНЕМАТИКА ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ С НЕПОДВИЖНЫМИ ОСЯМИ ВРАЩЕНИЯ ЗУБЧАТЫХ КОЛЁС

## 1.1. Структурный анализ зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения зубчатых колёс

*Простой (элементарный) зубчатый механизм* состоит из стойки и двух подвижных звеньев, которые называются зубчатыми колесами. Зубчатые колёса соединяются со стойкой вращательными кинематическими парами 5-го класса, а между собой – линейчатой парой 4-го класса. Тогда по формуле Чебышева получаем:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot P_5 - P_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1$$

Результат означает, что для однозначного определения возможных положений всех его звеньев необходима одна обобщённая координата. То есть данный механизм имеет одно ведущее звено.

Таким образом, ведущее зубчатое колесо, соединённое со стойкой вращательной кинематической парой представляют собой начальный механизм. Группа звеньев зубчатое колесо - стойка, последовательно присоединяясь к начальному механизму с помощью кинематической пары 4-го класса, образуют зубчатый механизм.

Количество зубчатых зацеплений, которые являются линейчатыми парами 4-го класса, соответствуют числу ступеней зубчатого механизма. Зубчатые колёса устанавливаются на валах жёстко. Поэтому вал и все колёса установленные на нём рассматриваются как одно звено. Значит, количество вращательных пар 5-го класса соответствует количеству валов, то есть подвижных звеньев, составляющих его структуру.

Число подвижных звеньев (валов)  $n$  и число ступеней  $k$  связаны между собой зависимостью:

$$n = k + 1$$

Тогда по формуле Чебышева получаем:

$$W = 3 \cdot (k + 1) - 2 \cdot (k + 1) - k = 3 \cdot k + 3 - 2 \cdot k - 2 - k = 1$$

То есть, для однозначного определения возможных положений всех звеньев сложного зубчатого механизма с неподвижными осями необходима одна обобщённая координата.

## 1.2. Определение передаточных отношений простых (элементарных) зубчатых механизмов

Для элементарных цилиндрических зубчатых механизмов характерно наличие двух видов зацепления: *внешнего* и *внутреннего*.

При *внешнем* зацеплении геометрические центры  $O_1$ ,  $O_2$  зубчатых колёс лежат по разные стороны от прямой  $t - t$ , проходящей через полюс зацепления  $P$  (Рис. 1.1,а). При *внутреннем* зацеплении геометрические центры  $O_1$ ,  $O_2$  зубчатых колёс лежат по одну сторону от прямой  $t - t$ , проходящей через полюс зацепления  $P$  (Рис. 1.1,б). Отметим, что прямая  $t - t$  перпендикулярна прямой, проходящей геометрические центры  $O_1$ ,  $O_2$ .



Передаточное отношение простого зубчатого механизма определяется по формуле:

$$i_{1-2} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}$$

где  $\omega_1, \omega_2$  – угловые скорости колёс 1,2;  $z_1, z_2$  – числа зубьев колёс 1,2.

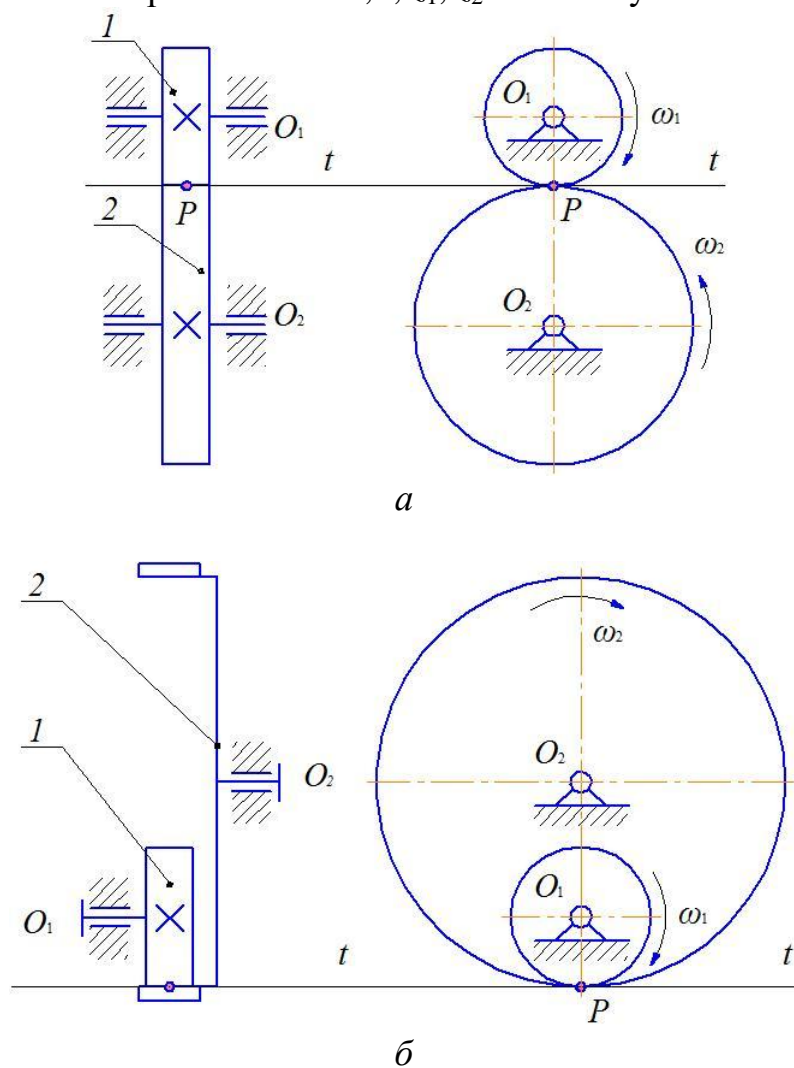


Рис. 1.1. Элементарные цилиндрические зубчатые механизмы:  
*a* – с внешним зацеплением; *б* – с внутренним зацеплением

В случае внешнего зацепления (Рис. 1.1,*a*), зубчатые колёса вращаются в противоположных направлениях, то есть их угловые скорости  $\omega_1, \omega_2$  имеют разные знаки. Это значит, что передаточное отношение такого механизма отрицательное  $i_{1-2} < 0$ .

В случае внутреннего зацепления (Рис. 1.1,*б*), зубчатые колёса вращаются в одном направлении, то есть их угловые скорости  $\omega_1, \omega_2$  имеют одинаковые знаки. Это значит, что передаточное отношение такого механизма положительное  $i_{1-2} > 0$ .

Быстрота вращения зубчатого колеса определяется угловой скоростью  $\omega$ , а также частотой вращения  $n$ . Данные параметры связаны между собой выражением:



$$\omega = \pi \cdot n / 30$$

где  $\omega$  – в  $\text{с}^{-1}$ ;  $n$  - в об/мин.

### 1.3. Определение передаточных отношений сложных зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения зубчатых колёс

К сложным механизмам с неподвижными осями относятся *рядные (рядовые)* и *ступенчатые*. Степень подвижности таких механизмов равна единице ( $W = 1$ ).

*Рядным (рядовым)* называется сложный зубчатый механизм, образованный последовательным соединением простых зубчатых механизмов с расположением всех зубчатых колёс в один ряд.

*Ступенчатым* называется сложный зубчатый механизм, образованный последовательным соединением простых зубчатых механизмов с расположением зубчатых колёс в несколько рядов. То есть в таких механизмах на одной может располагаться оси более одного колеса.

Общее передаточное отношение определяется с помощью выражения:

$$i_{1-n} = i_{1-2} \cdot i_{2-3} \cdot \dots \cdot i_{(n-1)-n}$$

где  $i_{1-2}, i_{2-3}, \dots, i_{(n-1)-n}$  - передаточные отношения ступеней.

Рассмотрим рядный (рядовой) зубчатый механизм, состоящий из 4-х подвижных цилиндрических колёс (рис. 1.2).

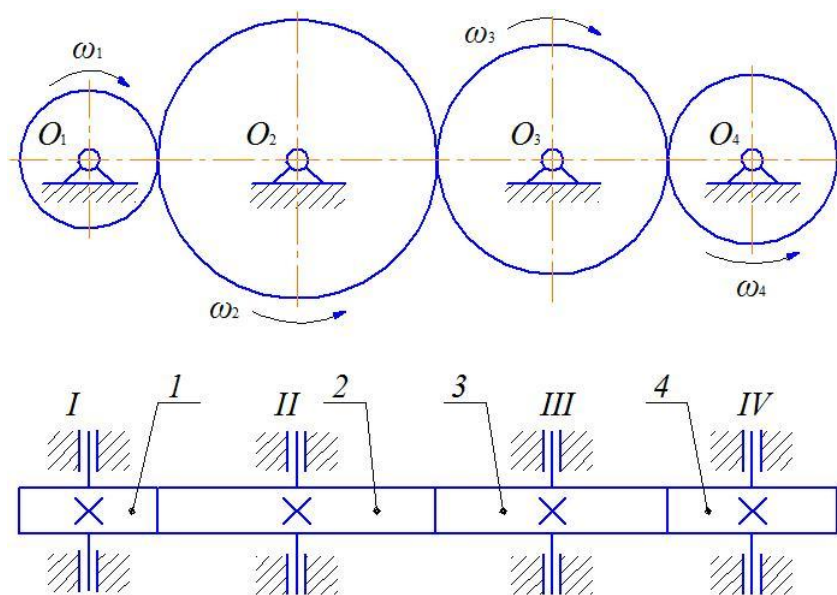


Рис. 1.2. Рядный (рядовой) зубчатый механизм

Заданный механизм является трёхступенчатым. Первая ступень образована колёсами 1 и 2, вторая ступень – колёсами 2 и 3, третья ступень – колёсами 3 и 4. Составим выражения для определения передаточных отношений ступеней:

$$i_{1-2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad i_{2-3} = -\frac{z_3}{z_2}; \quad i_{3-4} = -\frac{z_4}{z_3}$$

Тогда общее передаточное отношение:

$$i_{1-4} = i_{1-2} \cdot i_{2-3} \cdot i_{3-4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1}$$



Анализируя полученное выражение, сделаем выводы:

1) Общее передаточное отношение получилось со знаком «-», это говорит о том, что зубчатые колёса 1, 4 вращаются в противоположных направлениях.

2) Параметры зубчатых колёс 2, 3 не влияют на величину общего передаточного отношения.

Значит, величина общего передаточного отношения рядного механизма зависит только от параметров входного и выходного колес и не зависит от параметров промежуточных колёс. Промежуточные колеса являются **паразитными** и служат для увеличения межосевого расстояния и изменения направления вращения.

Рассмотрим ступенчатый зубчатый механизм, состоящий из 4-х подвижных цилиндрических колёс (рис. 1.3).

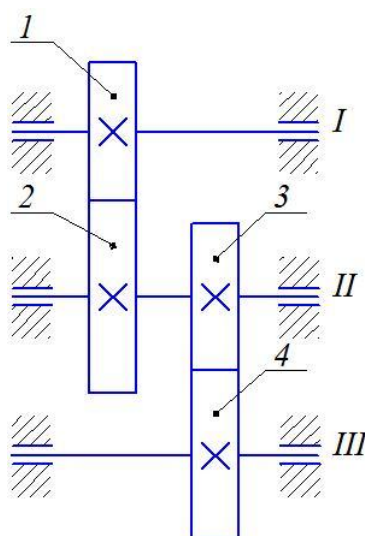


Рис. 1.3. Ступенчатый зубчатый механизм

Заданный механизм является двухступенчатым. Первая ступень образована колёсами 1 и 2, вторая ступень – колёсами 3 и 4. Составим выражения для определения передаточных отношений ступеней:

$$i_{1-2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad i_{3-4} = -\frac{z_4}{z_3}$$

Тогда общее передаточное отношение:

$$i_{1-4} = i_{1-2} \cdot i_{3-4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}$$

Анализируя полученное выражение, сделаем выводы:

1) Общее передаточное отношение получилось со знаком «+», это говорит о том, что зубчатые колёса 1, 4 вращаются в одном направлении.

2) На величину общего передаточного отношения влияют параметры всех зубчатых колёс механизма.

Для определения общего передаточного отношения сложного зубчатого механизма с неподвижными осями также может использоваться следующая формула:



$$i_{1-n} = u_{1-2} \cdot u_{2-3} \cdot \dots \cdot u_{(n-1)-n} \cdot (-1)^k$$

где  $k$  – количество ступеней с внешним зацеплением колёс;  $u_{1-2}, u_{2-3}, \dots, u_{(n-1)-n}$  – передаточные числа ступеней.

Под **передаточным числом** понимается модуль передаточного отношения.

Если в качестве входного звена принимать колесо  $1$ , а в качестве выходного звена – колесо  $n$ , то определяется **прямое передаточное отношение**  $i_{1-n}$ .

Если в качестве входного звена принимать колесо  $n$ , а в качестве выходного звена – колесо  $1$ , то определяется **обратное передаточное отношение**  $i_{n-1}$ .

Прямое и обратное передаточные отношения связаны между собой выражением:

$$i_{n-1} = \frac{1}{i_{1-n}}$$

### ПРИМЕР 1

Для сложного зубчатого механизма (рис. 1.4) определить аналитически общее передаточное отношение и частоты вращения зубчатых колёс при следующих исходных данных: частота вращения выходного колеса  $n_7 = 100$  об/мин; числа зубьев колёс  $z_1 = z_5 = 20, z_2 = 64, z_3 = 24, z_4 = 36, z_6 = 25, z_7 = 30$ .

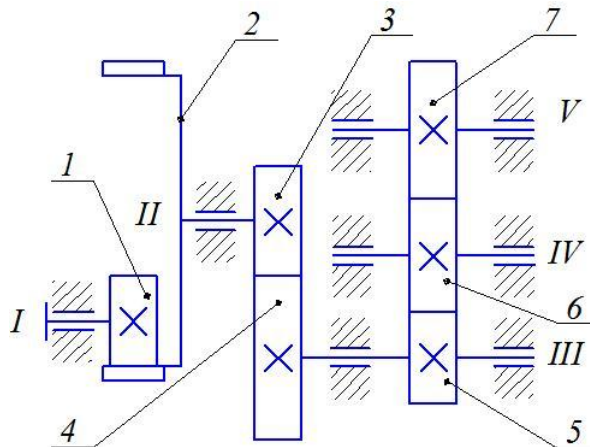


Рис. 1.4. Структурная схема зубчатого механизма

### Решение

#### 1. Определение общего передаточного отношения

Заданный механизм состоит из 7-ми зубчатых колёс, которые образуют четыре ступени. Колёса  $1 - 4$  составляют сложный двухступенчатый зубчатый механизм, в котором первая ступень образована колёсами  $1$  и  $2$ , а вторая – колёсами  $3$  и  $4$  соответственно. Колёса  $5 - 7$  образуют сложный рядный механизм, в котором колесо  $6$  является паразитным. Значит, общее передаточное отношение заданного механизма можно определить с помощью выражения:

$$i_{1-7} = i_{1-4} \cdot i_{5-7}$$

Передаточное отношение ступенчатого механизма:

$$i_{1-4} = u_{1-2} \cdot u_{3-4} \cdot (-1)^k$$



Число внешних зацеплений  $k = 1$ , тогда

$$i_{1-4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \cdot (-1)^1 = - \left( \frac{64}{20} \cdot \frac{36}{24} \right) = - 4,8$$

Передаточное отношение рядного механизма:

$$i_{5-7} = u_{5-6} \cdot u_{6-7} \cdot (-1)^k$$

Число внешних зацеплений  $k = 2$ , значит

$$i_{5-7} = \frac{z_7}{z_5} \cdot (-1)^2 = \frac{30}{20} = 1,5$$

Тогда

$$i_{1-7} = (- 4,8) \cdot (1,5) = - 7,2$$

**Общее передаточное отношение заданного механизма получилось со знаком «-» значит, колёса 1 и 7 вращаются в противоположных направлениях.**

## **2. Определение частот вращения зубчатых колёс**

Колёса 2 и 3, а также колёса 4 и 5 располагаются на одних и тех же валах, значит частоты их вращения:

$$n_2 = n_3 = n_4 \cdot u_{3-4}$$

$$n_4 = n_5 = n_6 \cdot u_{5-6}$$

Частоты вращения остальных колёс определяются с помощью выражений:

$$n_1 = n_2 \cdot u_{1-2}; \quad n_6 = n_7 \cdot u_{6-7};$$

Передаточные числа ступеней механизма:

$$u_{1-2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{64}{20} = 3,2; \quad u_{3-4} = \frac{z_4}{z_3} = \frac{36}{24} = 1,5;$$

$$u_{5-6} = \frac{z_6}{z_5} = \frac{25}{20} = 1,25; \quad u_{6-7} = \frac{z_7}{z_6} = \frac{30}{25} = 1,2.$$

Тогда, искомые частоты вращения:

$$n_6 = 100 \cdot 1,2 = 120 \text{ об/мин}; \quad n_4 = n_5 = 120 \cdot 1,25 = 150 \text{ об/мин};$$

$$n_2 = n_3 = 150 \cdot 1,5 = 225 \text{ об/мин}; \quad n_1 = n_2 \cdot i_{1-2} = 225 \cdot 3,2 = 720 \text{ об/мин}$$

**Также частоту вращения колеса 1 можно определить с помощью выражения:**

$$n_1 = n_7 \cdot u_{1-7}$$

Общее передаточное число механизма:

$$u_{1-7} = |i_{1-7}| = 7,2$$

Тогда, искомая частота вращения:

$$n_1 = 100 \cdot 7,2 = 720 \text{ об/мин}$$

**Значения вычисленной двумя способами частоты вращения  $n_1$  совпадают. Это говорит о правильности выполненных расчётов.**



## 2. СТРУКТУРА И КИНЕМАТИКА ЭПИЦИКЛИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

### 2.1. Общие сведения об эпициклических зубчатых механизмах

К *эпициклическим* зубчатым механизмам относятся *планетарные*, *дифференциальные* и *волновые*.

*Планетарным* называется *эпициклический* зубчатый механизм с подвижностью, равной единице ( $W=1$ ).

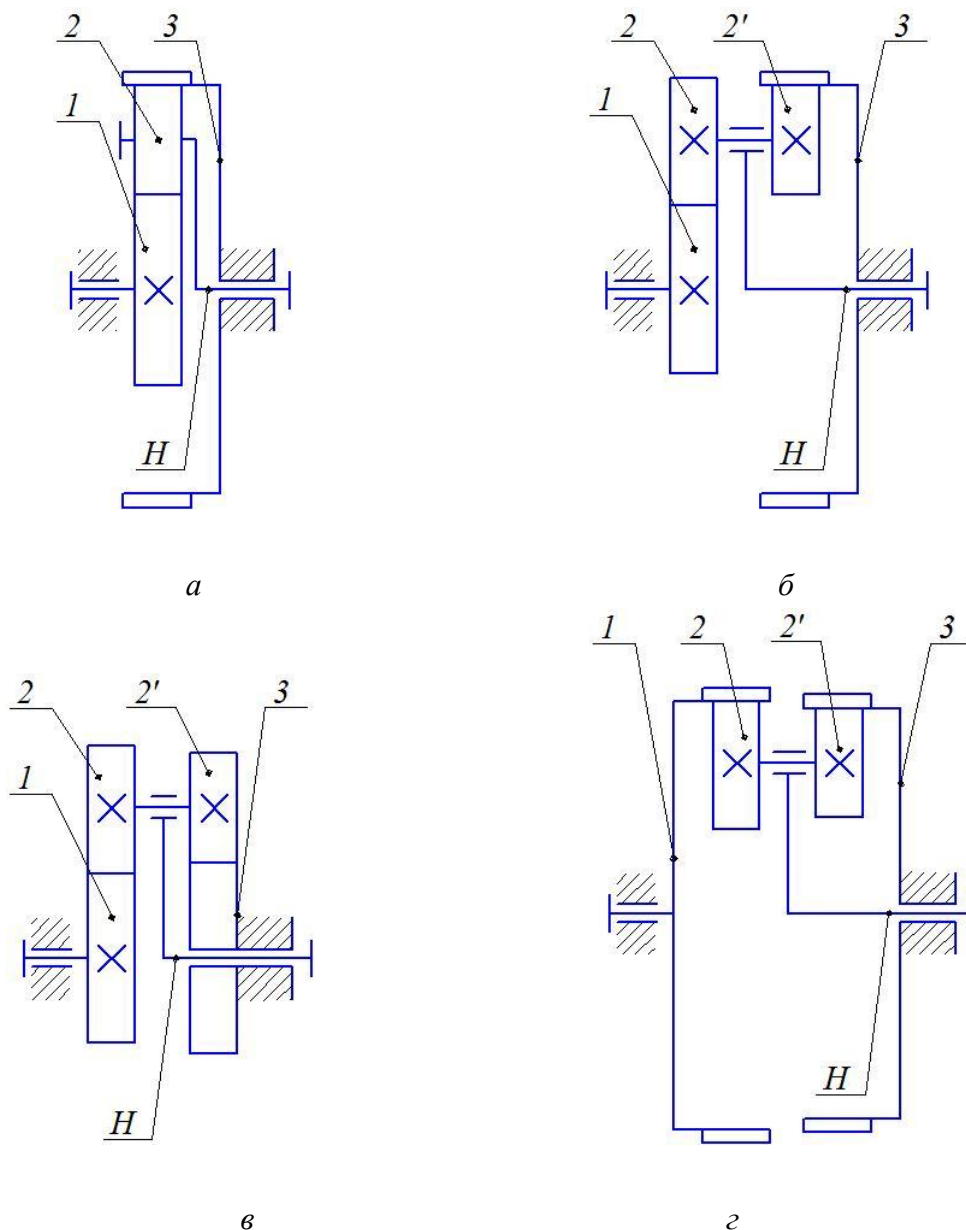


Рис. 2.1. Схемы типовых планетарных механизмов

Различают четыре основных типа *планетарных механизмов* (рис. 2.1). Структуру каждого из них составляют центральное подвижное колесо 1, центральное неподвижное колесо 3, водило  $H$ , а также один или несколько сателлитов. Сателлит установлен на подвижной оси водила и находится в зацеплении с колёсами 1 и 3 одновременно. Среди типовых планетарных



механизмов различают *однорядный* (Рис. 2.1, а) и *двухрядные* (Рис. 2.1, б - г). В *однорядном* механизме сателлит представляет собой обычное зубчатое колесо, он обозначен на схеме цифрой 2. В *двухрядных* механизмах сателлит представлен двумя зубчатыми колёсами, жёстко соединёнными между собой. Сателлитные колёса на схемах *двухрядных* механизмов обозначены цифрами 2 и 2'.

**Дифференциальным** называется *эпициклический* зубчатый механизм с подвижностью больше единицы ( $W > 1$ ).

Схемы типовых *дифференциальных* зубчатых механизмов можно получить, если в типовых схемах *планетарных* механизмов (рис. 2.1) колесо 3 сделать подвижным звеном.

**Волновым** называется механизм, структура которого наряду с жёсткими колёсами содержит одно или несколько гибких колёс.

Типовые *волновые* зубчатые механизмы могут быть получены вследствие модификации типовых планетарных механизмов [4, с.161-162].

## 2.2. Структурный анализ типовых планетарных и дифференциальных зубчатых механизмов

Рассмотрим планетарный зубчатый механизм 2-го типа (рис. 2.1б). Его структура включает в себя следующие подвижные звенья: центральное колесо 1, водило  $H$ , сдвоенный сателлит, который образован зубчатыми колёсами 2 и 2', жёстко соединёнными между собой. Таким образом, число подвижных звеньев  $n = 3$ . Вычертим его структурную схему (рис. 2.2) и обозначим кинематические пары.

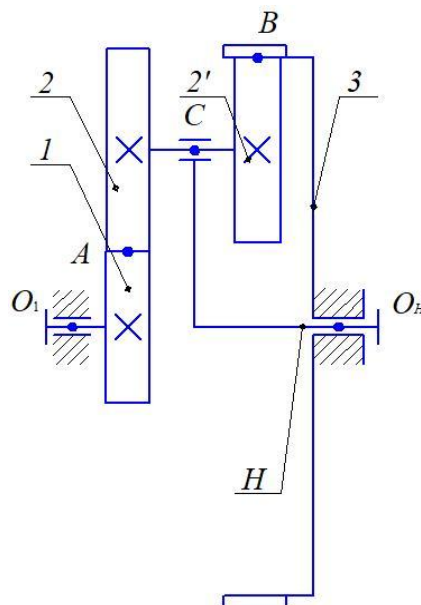


Рис. 2.2. Структурная схема планетарного зубчатого механизма 2-го типа с указанием кинематических пар

Центральное колесо 1 образует со стойкой  $O$  вращательную пару  $A$ , а с сателлитным колесом 2 – пару 4-го класса  $B$  (зубчатое зацепление). Водило  $H$



образует с неподвижным колесом 3 вращательную пару  $O_H$ , а с сателлитом – вращательную пару  $C$ . Сателлитное колесо 2' с неподвижным колесом 3 образуют пару 4-го класса  $B$  (зубчатое зацепление).

Таким образом, число подвижных звеньев  $n = 3$ , число пар 5-го класса  $P_5 = 3$ , число пар 4-го класса  $P_4 = 2$ . Тогда по формуле Чебышева получаем:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot P_5 - P_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1$$

Проведя аналогичные рассуждения для планетарных механизмов других типов, представленных на рис. 2.1 также получим число степеней свободы  $W = 1$ .

Далее рассмотрим дифференциальный зубчатый механизм, полученный на базе планетарного зубчатого механизма 2-го типа. В таком механизме по сравнению с планетарным добавляется одно подвижное звено. То есть число подвижных звеньев  $n = 3 + 1 = 4$ .

Вычертим структурную схему такого механизма (рис. 2.3) и обозначим кинематические пары.

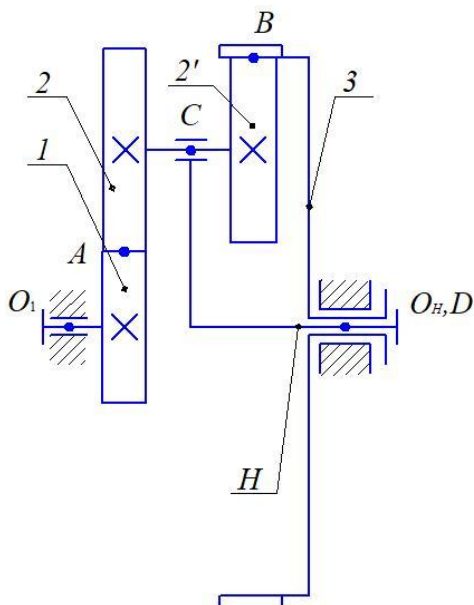


Рис. 2.3. Структурная схема дифференциального зубчатого механизма с обозначением кинематических пар

В дифференциальном механизме, по сравнению с планетарным, добавляется одна кинематическая пара  $D$ , которая относится к 5-му классу. То есть число кинематических пар пятого класса  $P_5 = 3 + 1 = 4$ . Тогда по формуле Чебышева получаем:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot P_5 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$$

Полученный результат означает, что на выходе имеется два независимых движения или из двух независимых движений на входе получают одно движение на выходе.

Проведя аналогичные рассуждения для планетарных механизмов других типов, представленных на рис. 2.1 также получим число степеней свободы  $W = 2$ .



### 2.3. Аналитическое определение передаточных отношений планетарных зубчатых механизмов

Передаточные отношения *планетарных* зубчатых механизмов определяются с помощью метода обращённого движения. Согласно этому методу, всем звеньям планетарного механизма (в том числе и неподвижному колесу 3) сообщается угловая скорость, равная по величине угловой скорости водила  $H$ , но противоположного направления (то есть  $-\omega_H$ ). В этом случае угловая скорость водила  $H$  будет равна нулю ( $\omega_H = 0$ ), и это звено можно считать условно неподвижным, а планетарный механизм преобразуется в механизм с неподвижными геометрическими осями вращения колес, то есть становится *обращённым*.

Применим данный метод для планетарного зубчатого механизма первого типа (рис. 2.1а). В результате получим *обращённый* механизм, схема которого представлена на рис 2.4.

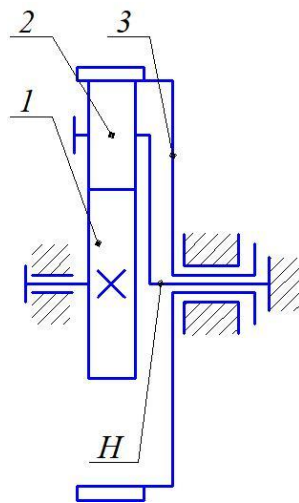


Рис. 2.4. Структурная схема обращённого механизма для планетарного зубчатого механизма 1-го типа

Такой механизм можно рассматривать как рядный (рядовой) в котором угловые скорости колёс 1, 2, 3 при неподвижном водиле  $H$  определяются с помощью формул (2.1) - (2.3):

$$\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H \quad (2.1)$$

$$\omega_2^H = \omega_2 - \omega_H \quad (2.2)$$

$$\omega_3^H = \omega_3 - \omega_H \quad (2.3)$$

Передаточное отношение обращённого механизма:

$$i_{1-3}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H}$$

Учитывая (2.1), (2.3) получаем:

$$i_{1-3}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} \quad (2.4)$$



где  $\omega_1, \omega_3, \omega_H$  – соответственно угловые скорости зубчатых колёс 1, 3 и водила  $H$  планетарного механизма.

Выражение (2.4) называется формулой Виллиса. В типовых планетарных механизмах, схемы которых представлены на рис. 2.1 зубчатое колесо 3 является неподвижным, то есть  $\omega_3 = 0$ . Тогда формулу Виллиса можно записать в виде:

$$i_{1-3}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - i_{1-H}$$

Из полученного выражения следует, что если входным звеном считать зубчатое колесо 1, то общее передаточное отношение типового планетарного механизма будет равно:

$$i_{1-H} = 1 - i_{1-3}^H$$

Если входным звеном считать водило  $H$ , то общее передаточное отношение будет равно:

$$i_{H-1} = \frac{1}{1 - i_{1-3}^H}$$

Таким образом, для планетарных механизмов определяются *прямое*  $i_{1-H}$ , *обратное*  $i_{H-1}$  и *внутреннее*  $i_{1-3}^H$  передаточные отношения. Под *внутренним передаточным отношением* планетарного зубчатого механизма подразумевается *передаточное отношение обращённого механизма*.

Для планетарного зубчатого механизма 1-го типа *внутреннее* передаточное отношение

$$i_{1-3}^H = i_{1-2}^H \cdot i_{2-3}^H$$

где  $i_{1-2}^H, i_{2-3}^H$  – передаточные отношения ступеней обращённого механизма.

Составим выражения для определения передаточных отношений ступеней обращённого механизма:

$$i_{1-2}^H = -\frac{z_2}{z_1}; \quad i_{2-3}^H = \frac{z_3}{z_2}$$

где  $z_1, z_2, z_3$  – числа зубьев колёс 1, 2, 3 соответственно.

Тогда, *внутреннее* передаточное отношение

$$i_{1-3}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \frac{z_3}{z_2} = -\frac{z_3}{z_1}$$

Следовательно, *прямое* и *обратное* передаточные отношения планетарного зубчатого механизма 1-го типа:

$$i_{1-H} = 1 - \left(-\frac{z_3}{z_1}\right) = 1 + \frac{z_3}{z_1}$$

$$i_{H-1} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_1}}$$

Обращённый механизм для планетарных зубчатых механизмов со сдвоенным сателлитом (рис. 2.1, б-г) можно рассматривать как двухступенчатый с неподвижными осями вращения зубчатых колёс. В таком механизме первая ступень образована зубчатыми колёсами 1 и 2, вторая ступень – зубчатыми



колёсами 2' и 3, а его передаточное отношение определяется с помощью формулы:

$$i_{1-3}^H = i_{1-2}^H \cdot i_{2'-3}^H$$

В планетарном зубчатом механизме 2-го типа колёса 1 и 2 находятся во внешнем зацеплении, а колёса 2' и 3 - во внутреннем зацеплении. Значит, передаточные отношения ступеней обращённого механизма

$$i_{1-2}^H = -\frac{z_2}{z_1}; \quad i_{2'-3}^H = \frac{z_3}{z_2'}$$

Тогда, *внутреннее* передаточное отношение:

$$i_{1-3}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \frac{z_3}{z_2'} = -\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$$

Следовательно, *прямое* и *обратное* передаточные отношения планетарного зубчатого механизма 2-го типа:

$$i_{1-H} = 1 - \left(-\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}\right) = 1 + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$$

$$i_{H-1} = \frac{1}{1 + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}}$$

Рассуждая аналогично, для планетарных механизмов 3-го (рис. 2.1,в) и 4-го (рис. 2.1,г) типов получим следующие результаты:

$$i_{1-H} = 1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'} \quad i_{H-1} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}}$$

### ПРИМЕР 2

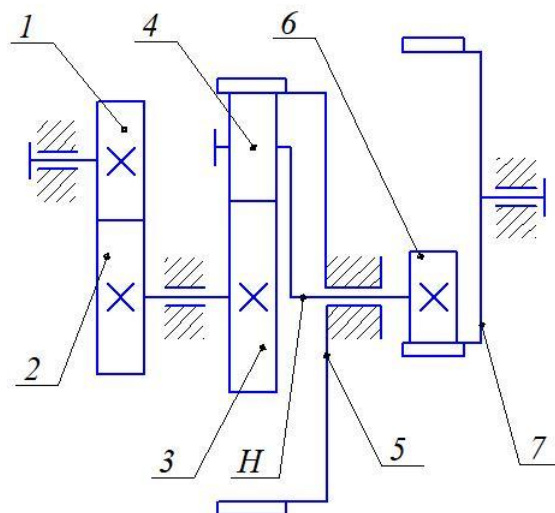


Рис. 2.5. Структурная схема заданного сложного зубчатого механизма

Для сложного зубчатого механизма (рис. 2.5) определить общее передаточное отношение  $i_{1-H}$ , частоты вращения зубчатых колёс 3, 7 и водила  $H$ , радиусы делительных окружностей зубчатых колёс механизма. Исходные данные: числа зубьев колёс  $z_1 = 22$ ;  $z_2 = 28$ ;  $z_3 = 18$ ;  $z_4 = 27$ ;  $z_5 = 72$ ;  $z_6 = 20$ ;  $z_7 = 50$ .



Модули зубьев  $m_{1-2} = 4$  мм;  $m_{3-5} = 2$  мм;  $m_{6-7} = 2,5$  мм. Частота вращения колеса 1  $n_1 = 795$  об/мин.

### Решение

Заданный механизм состоит из 7-и зубчатых колёс, которые образуют четыре ступени. Колёса 1 и 2 образуют элементарный зубчатый механизм с внешним зацеплением (рис. 1.1а). Колёса 3, 4, 5 и водило  $H$  образуют планетарный механизм 1-го типа (рис. 2.1а), в котором колесо 4 является сателлитом, а колесо 3 является входным звеном. Колёса 6 и 7 образуют элементарный зубчатый механизм с внутренним зацеплением (рис. 1.1б).

Значит, общее передаточное отношение заданного механизма можно определить с помощью выражения:

$$i_{1-H} = i_{1-2} \cdot i_{3-H} \cdot i_{6-7}$$

$$i_{1-2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{28}{22} = -1,27$$

$$i_{3-H} = 1 + \frac{z_5}{z_3} = 1 + \frac{72}{18} = 5$$

$$i_{6-7} = \frac{z_7}{z_6} = \frac{50}{20} = 2,5$$

Тогда общее передаточное отношение

$$i_{1-7} = (-1,27) \cdot 5 \cdot 2,5 = -15,86$$

Общее передаточное отношение получилось со знаком «-», это говорит о том, что зубчатое колесо 1 и зубчатое колесо вращаются в противоположных направлениях.

### 2. Определение частот вращения зубчатых колёс 3, 7 и водила $H$

Частота вращения зубчатого колеса 3 равна частоте вращения зубчатого колеса 2, то есть

$$n_3 = n_2 = n_1 / u_{1-2}$$

Так как  $u_{1-2} = |i_{1-2}| = 1,27$ , то

$$n_3 = n_2 = 795 / 1,27 = 626 \text{ об/мин}$$

Частота вращения водила  $H$

$$n_H = n_3 / u_{3-H}$$

$$u_{3-H} = |i_{3-H}| = 5$$

тогда

$$n_H = 626 / 5 = 125,2 \text{ об/мин}$$

Частота вращения зубчатого колеса 7

$$n_7 = n_6 / u_{6-7}$$

Частота вращения зубчатого колеса 6 равна частоте вращения водила  $H$ , то есть  $n_6 = n_H$ . Тогда

$$n_7 = n_H / u_{6-7}$$

Так как  $u_{6-7} = |i_{6-7}| = 2,5$ , то

$$n_7 = 125,2 / 2,5 = 50,1 \text{ об/мин}$$



Также частоту вращения зубчатого колеса 7 можно определить с помощью выражения:

$$n_7 = n_1 / u_{1-7}$$

Общее передаточное число механизма:

$$u_{1-7} = |i_{1-7}| = 15,86$$

Тогда, искомая частота вращения:

$$n_7 = 795 / 15,86 = 50,1 \text{ об/мин}$$

Значения вычисленной двумя способами частоты вращения  $n_7$  совпали, что говорит о правильности выполненных расчётов.

### 3. Определение радиусов делительных окружностей зубчатых колёс

Радиусы делительных окружностей зубчатых колёс

$$r_1 = 0,5 \cdot m \cdot z_1 = 0,5 \cdot 4 \cdot 22 = 44 \text{ мм} = 44 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_2 = 0,5 \cdot m \cdot z_2 = 0,5 \cdot 4 \cdot 28 = 56 \text{ мм} = 56 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_3 = 0,5 \cdot m \cdot z_3 = 0,5 \cdot 2 \cdot 18 = 18 \text{ мм} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_4 = 0,5 \cdot m \cdot z_4 = 0,5 \cdot 2 \cdot 27 = 27 \text{ мм} = 27 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_5 = 0,5 \cdot m \cdot z_5 = 0,5 \cdot 2 \cdot 72 = 72 \text{ мм} = 72 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_6 = 0,5 \cdot m \cdot z_6 = 0,5 \cdot 2,5 \cdot 20 = 25 \text{ мм} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_7 = 0,5 \cdot m \cdot z_7 = 0,5 \cdot 2,5 \cdot 50 = 72 \text{ мм} = 62,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Радиус водила

$$r_H = r_3 + r_4 = 18 \cdot 10^{-3} + 27 \cdot 10^{-3} = 45 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

или

$$r_H = r_5 - r_4 = 72 \cdot 10^{-3} - 27 \cdot 10^{-3} = 45 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Значения вычисленного двумя способами радиуса водила  $r_H$  совпали, что говорит о правильности выполненных расчётов.

### ПРИМЕР 3

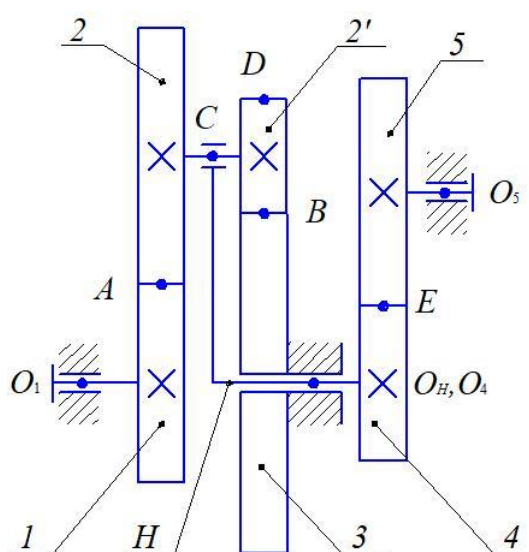


Рис. 2.6. Структурная схема заданного сложного зубчатого механизма



Для сложного зубчатого механизма (рис. 2.6) определить общее передаточное отношение  $i_{1-5}$ , частоты вращения водила  $H$  и колеса 5, радиусы делительных окружностей зубчатых колёс механизма и скорости точек  $A, B, C, D, E$ . Исходные данные: числа зубьев колёс  $z_1 = 35$ ;  $z_2 = 45$ ;  $z_2' = 20$ ;  $z_3 = 60$ ;  $z_4 = 17$ ;  $z_5 = 25$ . Модули зубьев  $m_{1-3} = 2,5$  мм;  $m_{4-5} = 4$  мм. Частота вращения колеса 1  $n_1 = 735$  об/мин.

### Решение

#### 1. Определение общего передаточного отношения

Заданный механизм состоит из 6-ти зубчатых колёс, которые образуют три ступени. Колёса 1, 2, 2', 3 и водило  $H$  образуют планетарный механизм 3-го типа (рис. 2.1в), в котором колёса 2 и 2' составляют сдвоенный сателлит, а колесо 1 является входным звеном. Колёса 4 и 5 образуют элементарный зубчатый механизм с внешним зацеплением (рис. 1.1а).

Значит, общее передаточное отношение заданного механизма можно определить с помощью выражения:

$$i_{1-5} = i_{1-H} \cdot i_{4-5}$$

$$i_{1-H} = 1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'} = 1 - \frac{45 \cdot 60}{35 \cdot 20} = -2,86$$

$$i_{4-5} = -\frac{z_5}{z_4} = -\frac{25}{17} = -1,47$$

Тогда общее передаточное отношение

$$i_{1-5} = (-2,86) \cdot (-1,47) = 4,2$$

Общее передаточное отношение получилось со знаком «+», это говорит о том, что зубчатое колесо 1 и зубчатое колесо 5 вращаются в одном направлении.

#### 2. Определение частот вращения водила $H$ и колеса 5

Частота вращения водила  $H$

$$n_H = n_1 / u_{1-H}$$

$$u_{1-H} = |i_{1-H}| = 2,86$$

тогда

$$n_H = 735 / 2,86 = 257 \text{ об/мин}$$

Частота вращения зубчатого колеса 5

$$n_5 = n_4 / u_{4-5}$$

Частота вращения зубчатого колеса 4 равна частоте вращения водила  $H$ , то есть  $n_4 = n_H$ . Тогда

$$n_5 = n_H / u_{4-5}$$

Так как  $u_{4-5} = |i_{4-5}| = 1,47$ , то

$$n_5 = 257 / 1,47 = 174,8 \text{ об/мин}$$

Также частоту вращения колеса 5 можно определить с помощью выражения:

$$n_5 = n_1 / u_{1-5}$$

Общее передаточное число механизма:

$$u_{1-5} = |i_{1-5}| = 4,2$$



Тогда, искомая частота вращения:

$$n_5 = 735 / 4,2 = 175 \text{ об/мин}$$

**Значения вычисленной двумя способами частоты вращения  $n_5$  отличаются не более чем на 3 %. Такое расхождение допускается по причине округлений, выполняемых в процессе проведения вычислений.**

**В дальнейших расчётах принимаем  $n_5 = 175$  об/мин**

### **3. Определение радиусов делительных окружностей зубчатых колёс и водила**

Радиусы делительных окружностей зубчатых колёс:

$$r_1 = 0,5 \cdot m \cdot z_1 = 0,5 \cdot 2,5 \cdot 35 = 43,75 \text{ мм} = 43,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_2 = 0,5 \cdot m \cdot z_2 = 0,5 \cdot 2,5 \cdot 45 = 56,25 \text{ мм} = 56,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_2' = 0,5 \cdot m \cdot z_2' = 0,5 \cdot 2,5 \cdot 20 = 25 \text{ мм} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_3 = 0,5 \cdot m \cdot z_3 = 0,5 \cdot 2,5 \cdot 60 = 75 \text{ мм} = 75 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_4 = 0,5 \cdot m \cdot z_4 = 0,5 \cdot 4 \cdot 17 = 34 \text{ мм} = 34 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_5 = 0,5 \cdot m \cdot z_5 = 0,5 \cdot 4 \cdot 25 = 50 \text{ мм} = 50 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Радиус водила:

$$r_H = r_1 + r_2 = 43,75 \cdot 10^{-3} + 56,25 \cdot 10^{-3} = 0,1 \text{ м}$$

или

$$r_H = r_2' + r_3 = 25 \cdot 10^{-3} + 75 \cdot 10^{-3} = 0,1 \text{ м}$$

**Значения вычисленного двумя способами радиуса водила  $r_H$  совпали, что говорит о правильности выполненных расчётов.**

### **4. Определение скоростей точек А, В, С, D, Е.**

Скорость точки А определяется с помощью формулы

$$v_A = \omega_1 \cdot r_1$$

Угловая скорость колеса 1

$$\omega_1 = \pi \cdot n_1 / 30 = 3,14 \cdot 735 / 30 = 76,93 \text{ с}^{-1}$$

Тогда

$$v_A = 76,93 \cdot 43,75 \cdot 10^{-3} = 3,37 \text{ м/с}$$

Точка В для колеса 2' является мгновенным центром скоростей (МЦС).

Следовательно,  $v_B = 0$ .

Скорость точки С определяется с помощью формулы

$$v_C = \omega_H \cdot r_H$$

Угловая скорость водила Н

$$\omega_H = \omega_1 / i_{1-H} = 76,93 / 2,86 = 26,9 \text{ с}^{-1}$$

Тогда

$$v_C = 26,9 \cdot 0,1 = 2,69 \text{ м/с}$$

Скорость точки D определяется с помощью формулы

$$v_D = 2 \cdot \omega_2' \cdot r_2'$$

Угловая скорость колеса 2'

$$\omega_2' = v_C / r_2'$$

Тогда

$$v_D = 2 \cdot v_C = 2 \cdot 2,69 = 5,38 \text{ м/с}$$

Скорость точки Е определяется с помощью формулы

$$v_E = \omega_4 \cdot r_4$$



Угловая скорость зубчатого колеса 4 равна угловой скорости водила  $H$ , то есть  $\omega_4 = \omega_H$ . Тогда

$$v_E = \omega_H \cdot r_4 = 26,9 \cdot 34 \cdot 10^{-3} = 0,91 \text{ м/с}$$

Также скорость точки  $E$  можно определить с помощью выражения:

$$v_E = \omega_5 \cdot r_5$$

Угловая скорость колеса 5

$$\omega_5 = \pi \cdot n_5 / 30 = 3,14 \cdot 175 / 30 = 18,3 \text{ с}^{-1}$$

Тогда

$$v_E = 18,3 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 0,92 \text{ м/с}$$

Значения вычисленной двумя способами скорости точки  $E$  отличаются не более чем на 3 %, что говорит о правильности выполненных расчётов.

Также скорость точки  $A$  может быть определена из следующих соображений

Угловая скорость зубчатого колеса  $2'$  равна угловой скорости колеса 2, то есть  $\omega_{2'} = \omega_2$ . При этом  $\omega_{2'} = v_A / (r_2 - r_{2'})$

Тогда

$$v_C / r_{2'} = v_A / (r_2 - r_{2'})$$

Откуда

$$v_A = v_C \cdot (r_2 - r_{2'}) / r_{2'} = 2,69 \cdot (56,25 \cdot 10^{-3} - 25 \cdot 10^{-3}) / 25 \cdot 10^{-3} = 3,36 \text{ м/с}$$

Значения вычисленной двумя способами скорости точки  $A$  отличаются не более чем на 3 %, что говорит о правильности выполненных расчётов.

#### ПРИМЕР 4

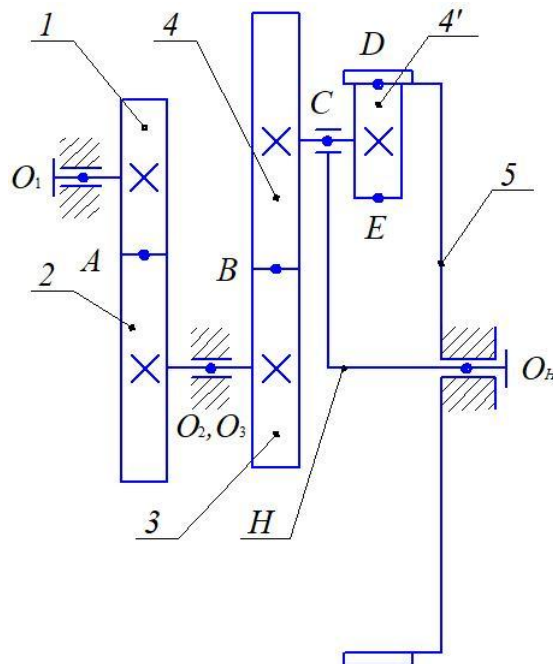


Рис. 2.7. Структурная схема заданного сложного зубчатого механизма

Для сложного зубчатого механизма (рис. 2.7) определить общее передаточное отношение  $i_{1-H}$ , частоты вращения колеса 3 и водила  $H$ , радиусы



делительных окружностей зубчатых колёс механизма и скорости точек  $A, B, C, D, E$ . Исходные данные: числа зубьев колёс  $z_1 = 18; z_2 = 27; z_3 = 35; z_4 = 45; z_4' = 20; z_5 = 100$ . Модули зубьев  $m_{1-2} = 5$  мм;  $m_{3-5} = 4$  мм. Частота вращения колеса  $1$   $n_1 = 965$  об/мин.

## Решение

### 1. Определение общего передаточного отношения

Заданный механизм состоит из 6-ти зубчатых колёс, которые образуют три ступени. Колёса  $1$  и  $2$  образуют элементарный зубчатый механизм с внешним зацеплением (рис. 1.1а). Колёса  $3, 4, 4', 5$  и водило  $H$  образуют планетарный механизм 2-го типа (рис. 2.1б), в котором колёса  $4$  и  $4'$  составляют сдвоенный сателлит, а колесо  $1$  является входным звеном.

Значит, общее передаточное отношение заданного механизма можно определить с помощью выражения:

$$i_{1-H} = i_{1-2} \cdot i_{3-H}$$

$$i_{1-2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{27}{18} = -1,5$$

$$i_{3-H} = 1 + \frac{z_4 \cdot z_5}{z_3 \cdot z_4'} = 1 + \frac{45 \cdot 100}{35 \cdot 20} = 7,43$$

Тогда общее передаточное отношение

$$i_{1-H} = (-1,5) \cdot 7,43 = -11,15$$

**Общее передаточное отношение получилось со знаком «-», это говорит о том, что зубчатое колесо  $1$  и водило  $H$  вращаются в противоположных направлениях.**

### 2. Определение частот вращения колеса $3$ и водила $H$

Частота вращения колеса  $3$  равна частоте вращения колеса  $2$ , то есть

$$n_3 = n_2 = n_1 / u_{1-2}$$

Так как  $u_{1-2} = |i_{1-2}| = 1,5$ , то

$$n_3 = n_2 = 965 / 1,5 = 643,3 \text{ об/мин}$$

Частота вращения водила  $H$

$$n_H = n_3 / u_{3-H}$$

$$u_{3-H} = |i_{3-H}| = 7,43$$

тогда

$$n_H = 643,3 / 7,43 = 86,6 \text{ об/мин}$$

**Так как известно общее передаточное число механизма  $u_{1-H}$ , то частоту вращения водила  $H$  можно определить с помощью выражения:**

$$n_H = n_1 / u_{1-H}$$

Общее передаточное число механизма:

$$u_{1-H} = |i_{1-H}| = 11,15$$

Тогда, искомая частота вращения:

$$n_H = 965 / 11,15 = 86,5 \text{ об/мин}$$



Значения вычисленной двумя способами частоты вращения  $n_H$  отличаются не более чем на 3 %. Такое расхождение допускается по причине округлений, выполняемых в процессе проведения вычислений.

В дальнейших расчётах принимаем  $n_H = 86,5$  об/мин

### 3. Определение радиусов делительных окружностей зубчатых колёс и водила

Радиусы зубчатых колёс

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,5 \cdot m \cdot z_1 = 0,5 \cdot 5 \cdot 18 = 45 \text{ мм} = 45 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ r_2 &= 0,5 \cdot m \cdot z_2 = 0,5 \cdot 5 \cdot 27 = 67,5 \text{ мм} = 67,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ r_3 &= 0,5 \cdot m \cdot z_3 = 0,5 \cdot 4 \cdot 35 = 70 \text{ мм} = 70 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ r_4 &= 0,5 \cdot m \cdot z_3' = 0,5 \cdot 4 \cdot 45 = 90 \text{ мм} = 90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ r_4' &= 0,5 \cdot m \cdot z_2' = 0,5 \cdot 4 \cdot 20 = 40 \text{ мм} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ r_5 &= 0,5 \cdot m \cdot z_3 = 0,5 \cdot 4 \cdot 100 = 200 \text{ мм} = 0,2 \text{ м} \end{aligned}$$

Радиус водила

$$r_H = r_3 + r_4 = 70 \cdot 10^{-3} + 90 \cdot 10^{-3} = 0,16 \text{ м}$$

или

$$r_H = r_5 - r_4' = 0,2 - 40 \cdot 10^{-3} = 0,16 \text{ м}$$

Значения вычисленного двумя способами радиуса водила  $r_H$  совпали, что говорит о правильности выполненных расчётов.

### 4. Определение скоростей точек A, B, C, D, E.

Скорость точки A определяется с помощью формулы

$$v_A = \omega_1 \cdot r_1$$

Угловая скорость колеса 1

$$\omega_1 = \pi \cdot n_1 / 30 = 3,14 \cdot 965 / 30 = 101 \text{ с}^{-1}$$

Тогда

$$v_A = 101 \cdot 45 \cdot 10^{-3} = 4,55 \text{ м/с}$$

Скорость точки B определяется с помощью формулы

$$v_B = \omega_3 \cdot r_3$$

Угловая скорость колеса 3

$$\omega_3 = \omega_2 = v_A / r_2 = 4,55 / 67,5 \cdot 10^{-3} = 67,4 \text{ с}^{-1}$$

Тогда

$$v_B = 67,4 \cdot 70 \cdot 10^{-3} = 4,72 \text{ м/с}$$

Скорость точки C определяется с помощью формулы

$$v_C = \omega_H \cdot r_H$$

Угловая скорость водила H

$$\omega_H = \omega_1 / u_{1-H} = 101 / 11,15 = 9,1 \text{ с}^{-1}$$

Тогда

$$v_C = 9,1 \cdot 0,16 = 1,46 \text{ м/с}$$

Точка D для колеса 4' является мгновенным центром скоростей (МЦС). Следовательно,  $v_D = 0$ .

Скорость точки E определяется с помощью формулы

$$v_E = 2 \cdot \omega_{4'} \cdot r_{4'}$$

Угловая скорость колеса 4'



$$\omega_{4'} = v_C / r_{4'}$$

Тогда

$$v_E = 2 \cdot v_C = 2 \cdot 1,46 = 2,92 \text{ м/с}$$

**Также скорость точки B может быть определена из следующих соображений**

Угловая скорость зубчатого колеса 4' равна угловой скорости колеса 4, то есть  $\omega_{4'} = \omega_4$ . При этом

$$\omega_4 = v_C / r_{4'} \text{ и } \omega_{4'} = v_B / (r_{4'} + r_4)$$

Тогда

$$v_C / r_{4'} = v_B / (r_{4'} + r_4)$$

Следовательно, скорость точки B:

$$v_B = v_C \cdot (r_{4'} + r_4) / r_{4'} = 1,46 \cdot (40 \cdot 10^{-3} + 90 \cdot 10^{-3}) / 40 \cdot 10^{-3} = 4,75 \text{ м/с}$$

**Значения вычисленной двумя способами скорости точки B отличаются не более чем на 3 %, что говорит о правильности выполненных расчётов.**

### ПРИМЕР 5

Для сложного зубчатого механизма (рис. 2.8) определить общее передаточное отношение  $i_{H-5}$ , частоты вращения колёс 3 и 5, радиусы делительных окружностей зубчатых колёс механизма и скорости точек A, B, C, D, E. Исходные данные: числа зубьев колёс  $z_1 = 54$ ;  $z_2 = z_4 = 20$ ;  $z_2' = 24$ ;  $z_3 = 58$ ;  $z_5 = 25$ . Модули зубьев  $m_{1-3} = 3 \text{ мм}$ ;  $m_{4-5} = 4 \text{ мм}$ . Частота вращения водила H  $n_H = 1280 \text{ об/мин}$ .

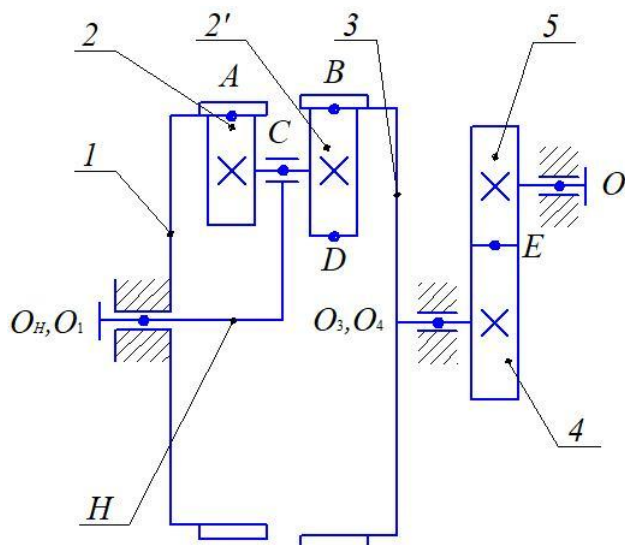


Рис. 2.8. Структурная схема заданного сложного зубчатого механизма

### Решение

#### 1. Определение общего передаточного отношения

Заданный механизм состоит из 6-ти зубчатых колёс, которые образуют три ступени. Колёса 1, 2, 2', 3 и водило H образуют планетарный механизм 4-го типа (рис. 2.1г), в котором колёса 2 и 2' составляют сдвоенный сателлит, а водило H является входным звеном. Колёса 4 и 5 образуют элементарный зубчатый механизм с внешним зацеплением (рис. 1.1а).



Значит, общее передаточное отношение заданного механизма можно определить с помощью выражения:

$$i_{H-5} = i_{H-3} \cdot i_{4-5}$$

$$i_{H-3} = \frac{1}{1 - \frac{z_2' \cdot z_1}{z_3 \cdot z_2}} = \frac{1}{1 - \frac{24 \cdot 54}{58 \cdot 20}} = -8,53$$

$$i_{4-5} = -\frac{z_5}{z_4} = -\frac{25}{20} = -1,25$$

Тогда общее передаточное отношение

$$i_{H-5} = (-8,53) \cdot (-1,25) = 10,66$$

Общее передаточное отношение получилось со знаком «+», это говорит о том, что водило  $H$  зубчатое и зубчатое колесо 5 вращаются в одном направлении.

## 2. Определение частот вращения зубчатых колес 3 и 5

Частота вращения колеса 3

$$n_3 = n_H / u_{H-3}$$

Так как  $u_{H-3} = |i_{H-3}| = 8,53$ , то

$$n_3 = 1280 / 8,53 = 150 \text{ об/мин}$$

Частота вращения зубчатого колеса 5

$$n_5 = n_4 / u_{4-5}$$

Частота вращения зубчатого колеса 4 равна частоте вращения колеса 3, то есть  $n_4 = n_3$ . Тогда

$$n_5 = n_3 / u_{4-5}$$

Так как  $u_{4-5} = |i_{4-5}| = 1,25$ , то

$$n_5 = 150 / 1,25 = 120 \text{ об/мин}$$

Также частоту вращения зубчатого колеса 5 можно определить с помощью выражения:

$$n_5 = n_H / u_{H-5}$$

Общее передаточное число механизма:

$$u_{H-5} = |i_{H-5}| = 10,66$$

Тогда, искомая частота вращения:

$$n_5 = 1280 / 10,66 = 120,1 \text{ об/мин}$$

Значения вычисленной двумя способами частоты вращения  $n_5$  отличаются не более чем на 3 %. Такое расхождение допускается по причине округлений, выполняемых в процессе проведения вычислений.

В дальнейших расчётах принимаем  $n_5 = 120 \text{ об/мин}$

## 3. Определение радиусов делительных окружностей зубчатых колёс и водила

Радиусы делительных окружностей зубчатых колёс:

$$r_1 = 0,5 \cdot m \cdot z_1 = 0,5 \cdot 3 \cdot 54 = 81 \text{ мм} = 81 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_2 = 0,5 \cdot m \cdot z_2 = 0,5 \cdot 3 \cdot 20 = 30 \text{ мм} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_2' = 0,5 \cdot m \cdot z_2' = 0,5 \cdot 3 \cdot 24 = 36 \text{ мм} = 36 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$



$$r_3 = 0,5 \cdot m \cdot z_3 = 0,5 \cdot 3 \cdot 58 = 87 \text{ мм} = 87 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_4 = 0,5 \cdot m \cdot z_4 = 0,5 \cdot 4 \cdot 20 = 40 \text{ мм} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_5 = 0,5 \cdot m \cdot z_5 = 0,5 \cdot 4 \cdot 25 = 50 \text{ мм} = 50 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Радиус водила:

$$r_H = r_1 - r_2 = 81 \cdot 10^{-3} - 30 \cdot 10^{-3} = 51 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

или

$$r_H = r_3 - r_2' = 87 \cdot 10^{-3} - 36 \cdot 10^{-3} = 51 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

**Значения вычисленного двумя способами радиуса водила  $r_H$  совпали, что говорит о правильности выполненных расчётов.**

#### **4. Определение скоростей точек А, В, С, D, E.**

Точка А для колеса 2 является мгновенным центром скоростей (МЦС). Следовательно,  $v_A = 0$ .

Скорость точки С определяется с помощью формулы

$$v_C = \omega_H \cdot r_H$$

Угловая скорость водила Н

$$\omega_H = \pi \cdot n_H / 30 = 3,14 \cdot 1280 / 30 = 134 \text{ с}^{-1}$$

Тогда

$$v_C = 134 \cdot 51 \cdot 10^{-3} = 6,83 \text{ м/с}$$

Скорость точки В определяется с помощью формулы

$$v_B = \omega_3 \cdot r_3$$

Угловая скорость колеса 3

$$\omega_3 = \omega_H / u_{H-3} = 134 / 8,53 = 15,7 \text{ с}^{-1}$$

Тогда

$$v_B = 15,7 \cdot 87 \cdot 10^{-3} = 1,37 \text{ м/с}$$

Угловая скорость зубчатого колеса 2' равна угловой скорости колеса 2, то есть  $\omega_{2'} = \omega_2$ . При этом

$$\omega_2 = v_C / r_2 \text{ и } \omega_{2'} = v_B / (r_{2'} - r_2)$$

Тогда

$$v_C / r_2 = v_B / (r_{2'} - r_2)$$

Следовательно, скорость точки В:

$$v_B = v_C \cdot (r_{2'} - r_2) / r_2 = 6,83 \cdot (36 \cdot 10^{-3} - 30 \cdot 10^{-3}) / 30 \cdot 10^{-3} = 1,37 \text{ м/с}$$

**Также скорость точки В можно определить с помощью выражения:**

$$v_B = \omega_3 \cdot r_3$$

Угловая скорость колеса 3

$$\omega_3 = \omega_H / u_{H-3} = 134 / 8,53 = 15,7 \text{ с}^{-1}$$

Тогда

$$v_B = 15,7 \cdot 87 \cdot 10^{-3} = 1,37 \text{ м/с}$$

**Значения вычисленной двумя способами скорости точки В совпадают, что говорит о правильности выполненных расчётов.**

Также угловая скорость колеса 2' может быть определена с помощью выражения

$$\omega_{2'} = v_D / (r_2 + r_{2'})$$

Тогда

$$v_C / r_2 = v_D / (r_2 + r_{2'})$$



Откуда скорость точки  $D$

$$v_D = v_C \cdot (r_2 + r_2') / r_2 = 6,83 \cdot (30 \cdot 10^{-3} + 36 \cdot 10^{-3}) / 30 \cdot 10^{-3} = 15 \text{ м/с}$$

Скорость точки  $E$  определяется с помощью формулы

$$v_E = \omega_4 \cdot r_4$$

Угловая скорость зубчатого колеса 4 равна угловой скорости колеса 3, то есть  $\omega_4 = \omega_3$ . Тогда

$$v_E = \omega_3 \cdot r_4 = 15,7 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 0,628 \text{ м/с}$$

**Также скорость точки  $E$  можно определить с помощью выражения:**

$$v_E = \omega_5 \cdot r_5$$

Угловая скорость колеса 5

$$\omega_5 = \omega_3 / u_{4,5} = 15,7 / 1,25 = 12,56 \text{ с}^{-1}$$

Тогда

$$v_E = 12,56 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 0,628 \text{ м/с}$$

**Значения вычисленной двумя способами скорости точки  $E$  совпадают, что говорит о правильности выполненных расчётов.**

### 3. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

#### 3.1. Основные положения

При выполнении кинематического анализа зубчатых механизмов используются *аналитический* метод, рассмотренный выше и *графоаналитический* метод, который рассматривается далее. На практике рекомендуется использовать параллельно оба метода с последующим сравнением полученных результатов.

Решение задач кинематического анализа зубчатых механизмов *графоаналитическим методом* можно разбить на три основных этапа:

- 1) Построение кинематической схемы.
- 2) Построение плана окружных скоростей.
- 3) Построение плана угловых скоростей.

*Кинематическая схема* любого механизма, в том числе зубчатого выполняется с учётом линейных размеров звеньев. При построении кинематической схемы зубчатого механизма имеют значение радиальные размеры зубчатых колёс. Из теории эвольвентного зацепления пары цилиндрических прямозубых колёс известно, что полюс зацепления  $P$  является точкой контакта начальных окружностей  $r_{w1}$ ,  $r_{w2}$  зубчатых колёс. Если пара зубчатых колёс образует нулевую или равносмещённую передачу, то радиусы начальных окружностей равны радиусам соответствующих делительных  $r_{w1} = r_1$ ,  $r_{w2} = r_2$  окружностей. Радиус делительной окружности определяется с помощью формулы:

$$r = 0,5 \cdot m \cdot z$$

где  $m$  – модуль зуба, мм;  $z$  - число зубьев колеса.





результате таких построений получатся отрезки  $BB'$  и  $CC'$ , которые являются векторами скоростей  $v_B, v_C$ .

Если зубчатое колесо является входным или выходным звеном, то для него достаточно построить один треугольник скоростей. Если зубчатое колесо является промежуточным звеном, то число треугольников скоростей соответствует числу зубчатых колёс, с которыми оно входит в зацепление. На рис. 3.2 изображена кинематическая схема рядного зубчатого механизма и на ней изображены треугольники скоростей зубчатых колёс. При этом  $v_A = v_B = v_C$ .

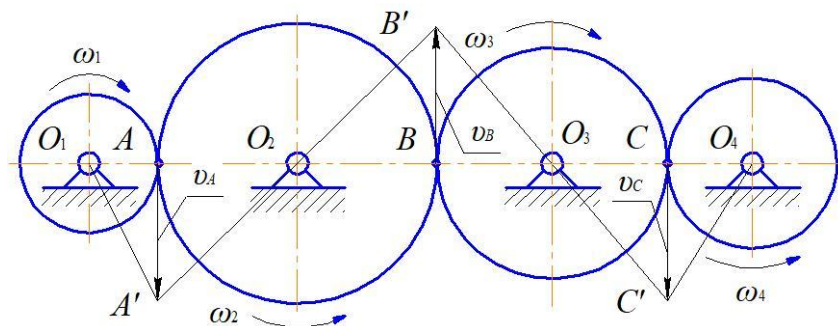


Рис. 3.2. К построению треугольников скоростей зубчатых колёс, рядного зубчатого механизма

План окружных скоростей зубчатого механизма можно строить и отдельно от кинематической схемы. При этом кинематическая схема может быть построена в одной проекции. Такой способ рассмотрен в примере 6.

Если зубья подвижного колеса входят в зацепление с зубьями неподвижного колеса, то точка их контакта (полюс зацепления)  $P$  является мгновенным центром скоростей (МЦС). Следовательно, подвижное зубчатое колесо совершает сложное плоскопараллельное движение. Построенные в общем виде треугольники скоростей зубчатого колеса при его внешнем зацеплении с неподвижным зубчатым колесом и внутреннем зацеплении с неподвижным зубчатым колесом приведены на рис. 3.3а и рис. 3.3б соответственно. Для обоих случаев зацепления имеем  $v_A = 2 \cdot v_C$ .

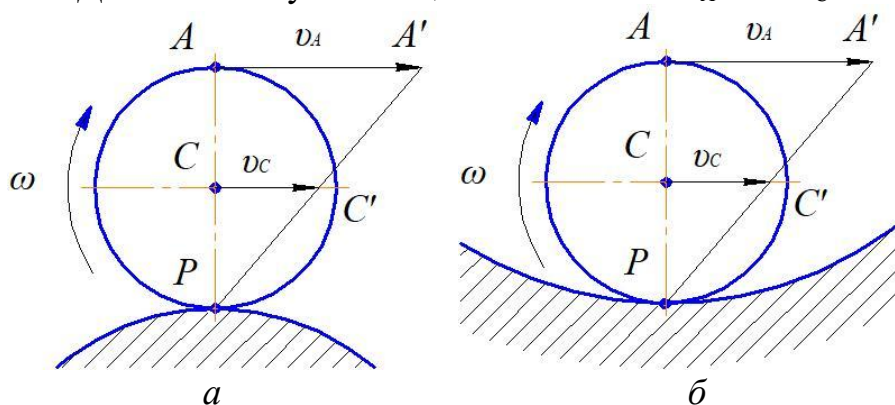


Рис. 3.3 Планы окружных скоростей (треугольники скоростей) зубчатого колеса при его взаимодействии с неподвижным зубчатым колесом:  
*a* – внешнее зацепление; *б* – внутреннее зацепление



План угловых скоростей представляет собой пучок прямых параллельных прямых распределения скоростей зубчатых колёс и проходящих через точку  $P$  отрезка  $OP$ , являющегося полусуммой расстояний. Пересечение прямых, входящих в пучок, с прямой, проходящей через точку  $O$  и являющейся осью угловых скоростей, даёт точки, которые вместе с точкой  $O$  образуют отрезки прямо пропорциональные угловым скоростям зубчатых колёс. Ось угловых скоростей располагается перпендикулярно оси отсчёта окружных скоростей, то есть параллельно векторам окружных скоростей. Методика построения планов угловых скоростей будет рассмотрена в п.3.2-3.3 и в примерах 6-7.

### 3.2. Графоаналитическое определение передаточных отношений зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения зубчатых колёс

Рассмотрим зубчатый механизм, состоящий из пары прямозубых колёс внешнего зацепления (рис. 1.1а), для которого известны радиальные размеры зубчатых колёс. Используя масштабный коэффициент  $\mu_R$  (м/мм) построим для него кинематическую схему в двух проекциях (рис. 3.4а,б). Полусумму зацепления зубьев обозначим  $P$ .

Скорости точек, лежащих на начальных окружностях колёс 1, 2 равны между собой. То есть:

$$v_P = \omega_1 \cdot r_{w1}; \quad v_P = \omega_2 \cdot r_{w2}$$

Следовательно, угловые скорости колёс 1,2:

$$\omega_1 = v_P / r_{w1}; \quad \omega_2 = v_P / r_{w2}$$

На кинематической схеме с использованием масштабного коэффициента  $\mu_v \left( \frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right)$  построим отрезок  $PP'$ , который является вектором скорости  $v_P$  (рис. 3.4б).

Через точки  $O_1$  и  $P'$  проведём прямую, которая является прямой распределения скоростей точек колеса 1, лежащих на линии центров  $O_1O_2$ . В результате получается отрезок  $O_1P'$ , который вместе с отрезками  $O_1P$ ,  $PP'$  образует  $\Delta O_1PP'$  – треугольник скоростей колеса 1.

Выполнив аналогичные построения для колеса 2, получим  $\Delta O_2PP'$ , который является его треугольником скоростей.

Радиусы начальных окружностей колёс 1,2:

$$r_{w1} = O_1P \cdot \mu_R; \quad r_{w2} = O_2P \cdot \mu_R$$

Скорость точки  $P$ :

$$v_P = PP' \cdot \mu_v$$

Следовательно, угловая скорость колеса 1:

$$\omega_1 = v_P / r_{w1} = (PP' \cdot \mu_v) / (O_1P \cdot \mu_R)$$

или

$$\omega_1 = (PP' / O_1P) \cdot (\mu_R / \mu_v)$$

$PP' / O_1P = \text{tg } \alpha_1$ , тогда

$$\omega_1 = \text{tg } \alpha_1 \cdot (\mu_R / \mu_v)$$

Рассуждая аналогично, для колеса 2 получаем:



$$\omega_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot (\mu_R / \mu_0)$$

Так как зацепление внешнее, то угловые скорости зубчатых колёс направлены в противоположные стороны. Значит, передаточное отношение  $i_{1-2}$  берётся со знаком «-»:

$$i_{1-2} = - \frac{\omega_1}{\omega_2} = - \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}$$

План угловых скоростей (рис. 3.4в) строим в следующем порядке:

1) Проводим горизонтальную прямую (ось угловых скоростей) и обозначаем на ней точку  $O$ .

2) Строим вертикальный луч с началом в точке  $O$  направленный вниз и откладываем на нём отрезок  $OP$  произвольной длины.

3) Через точку  $P$  проводим прямую параллельную отрезку  $O_1P'$ . Пересечение этой прямой с осью угловых скоростей даёт точку 1 и отрезок  $O1$ .

4) Через точку  $P$  проводим прямую параллельную отрезку  $O_2P'$ . Пересечение этой прямой с осью угловых скоростей даёт точку 2 и отрезок  $O2$ .

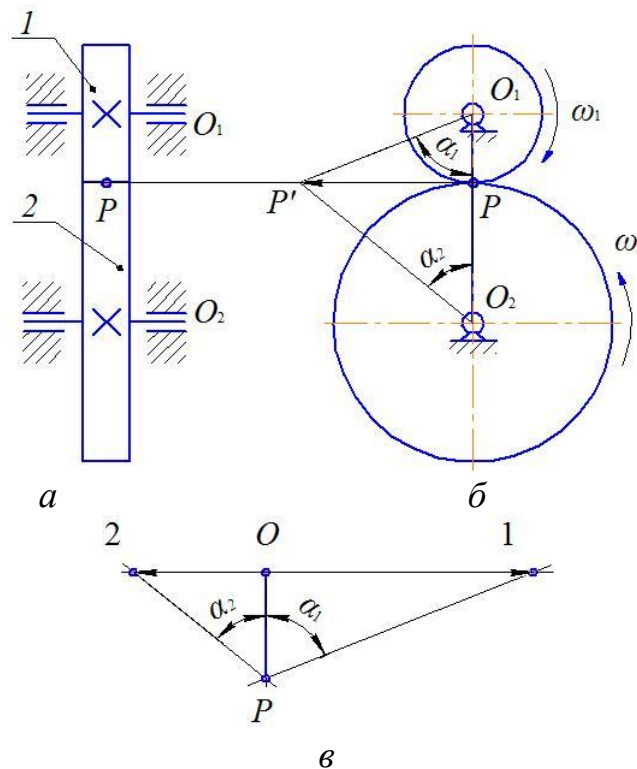


Рис. 3.4. Кинематический анализ элементарного зубчатого механизма с внешним зацеплением зубчатых колёс графоаналитическим методом :  
 а - кинематическая схема (фронтальная проекция); б – кинематическая схема (профильная проекция) и план окружных скоростей;  
 в – план угловых скоростей.

В результате выполненных построений получаем  $\Delta OP1$ ,  $\Delta OP2$  - треугольники угловых скоростей колёс 1, 2 соответственно. Из полученных треугольников имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = O1 / OP \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = O2 / OP$$

Тогда



$$i_{1-2} = - \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = - \left( \frac{O1}{OP} : \frac{O2}{OP} \right)$$

Окончательно получаем

$$i_{1-2} = - \frac{O1}{O2}$$

Так как передаточное отношение  $i_{1-2}$  получилось со знаком «-», то вектора  $O1$ ,  $O2$ , полученные в результате построения плана угловых скоростей, направлены в противоположные стороны.

Графоаналитическое решение кинематического анализа элементарного зубчатого механизма с внутренним зацеплением зубчатых колёс представлено на рис. 3.5.

В результате получаем

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}$$

или

$$i_{1-2} = \frac{O1}{O2}$$

Так как передаточное отношение  $i_{1-2}$  получилось со знаком «+», то вектора  $O1$ ,  $O2$ , полученные в результате построения плана угловых скоростей, сонаправлены.

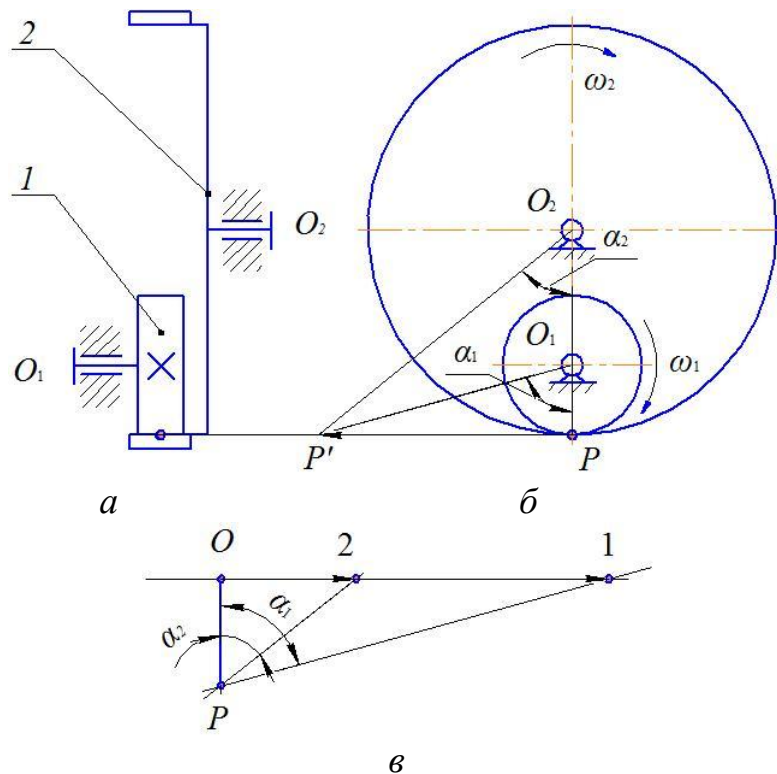


Рис. 3.5. Кинематический анализ элементарного зубчатого механизма с внутренним зацеплением зубчатых колёс графоаналитическим методом: *a* - кинематическая схема (фронтальная проекция); *б* – кинематическая схема (профильная проекция) и план окружных скоростей; *в* – план угловых скоростей.



Определение передаточных отношений сложных зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения зубчатых колёс рассмотрено в примере 6.

### 3.3. Графоаналитическое определение передаточных отношений планетарных зубчатых механизмов

Особенностью конструкции планетарного зубчатого механизма является наличие одного или нескольких сателлитных колёс. Сателлитное колесо совершает сложное плоскопараллельное движение. Центральное подвижное колесо  $I$  и водило  $H$  совершают вращательное движение. Подвижная ось водила  $H$  проходит через центр масс  $C$  сателлитного колеса, которое в свою очередь входит в зацепление с центральным подвижным колесом  $I$  в точке  $A$  и центральным неподвижным колесом  $3$  в точке  $B$ . Следовательно точка  $B$  для сателлитного колеса является мгновенным центром скоростей (МЦС).

Рассмотрим планетарный зубчатый механизм 1-го типа (рис. 2.1а), для которого известны числа зубьев колёс  $z_1, z_2, z_3$  и количество сателлитов  $k$  (допустим  $k = 3$ ). Требуется определить *прямое*  $i_{1-H}$ , *обратное*  $i_{H-1}$  и *внутренне*  $i_{1-3}^H$  передаточные отношения, а также передаточные отношения ступеней обращённого механизма  $i_{1-2}^H, i_{2-3}^H$  графоаналитическим методом.

Сначала для заданного механизма строим кинематическую схему в двух проекциях и обозначаем на ней кинематические пары  $O_1, C, O_H, A, B$ . (рис. 3.6а,б). Далее на профильной проекции кинематической схемы (рис. 3.6б) строим план окружных скоростей. Отрезки  $AA', CC'$ , полученные в результате построения, являются векторами скоростей  $v_A, v_C$ . Затем строим план угловых скоростей (рис. 3.6в). Отрезки  $O1, O2, OH$ , полученные в результате построения, являются векторами угловых скоростей  $\omega_1, \omega_2, \omega_H$ .

Далее, используя рассуждения, проведённые в п.3.2. для элементарных цилиндрических зубчатых механизмов, получим формулы для графоаналитического определения передаточных отношений типовых планетарных зубчатых механизмов.

Прямое передаточное отношение  $i_{1-H}$  планетарного зубчатого механизма можно выразить через соотношение угловых скоростей колеса  $I$  и водила  $H$ :

$$i_{1-H} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_H} \quad (3.1)$$

В формуле (3.1) знак «+» если колесо  $I$  и водило  $H$  вращаются в одном направлении, знак «-» если колесо  $I$  и водило  $H$  вращаются в противоположных направлениях. Чтобы получить формулу для графоаналитического определения прямого передаточного отношения планетарного механизма, нужно в формуле (3.1) угловые скорости заменить соответствующими векторами. Для нашего случая получаем:

$$i_{1-H}^{гр} = \frac{O1}{OH} \quad (3.2)$$



Знак «+» в формуле (3.2) выбран потому что вектора  $O1$  и  $OH$  сонаправлены (см. рис. 3.6в), то есть колесо  $1$  и водило  $H$  вращаются в одном направлении.

Для графоаналитического определения обратного передаточного отношения используется формула:

$$i_{H-1}^{gp} = \frac{1}{i_{1-H}^{gp}} \quad (3.3)$$

Формула (3.3) справедлива для планетарных механизмов всех типов. Знак передаточного отношения  $i_{1-H}^{gp}$  определяется взаимным направлением векторов  $O1$  и  $OH$ : «+» если сонаправлены, знак «-» если направлены в противоположные стороны.

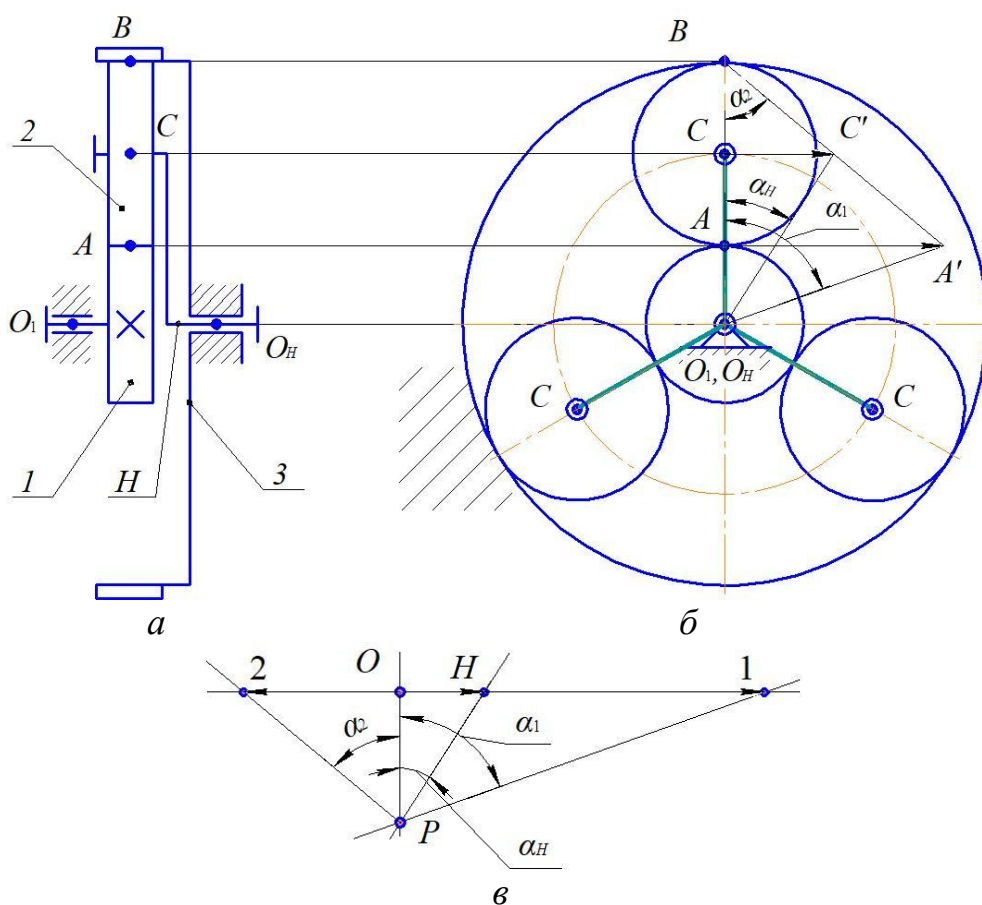


Рис. 3.6. Кинематический анализ планетарного механизма 1-го типа графоаналитическим методом: *а* – кинематическая схема (фронтальная проекция); *б* – кинематическая схема (профильная проекция) и план окружных скоростей; *в* – план угловых скоростей.

Рассуждая аналогично, получим формулы, для графоаналитического определения передаточных отношений  $i_{1-2}^H$ ,  $i_{2-3}^H$ ,  $i_{1-3}^H$ . Сначала данные передаточные отношения выразим через соотношения угловых скоростей  $\omega_1^H$ ,  $\omega_2^H$ ,  $\omega_3^H$  зубчатых колёс  $1, 2, 3$  соответственно:



$$i_{1-2}^H = \pm \frac{\omega_1^H}{\omega_2^H} \quad (3.4) \quad i_{2-3}^H = \pm \frac{\omega_2^H}{\omega_3^H} \quad (3.5) \quad i_{1-3}^H = \pm \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} \quad (3.6)$$

Знак «+» или «-» для выражений (3.4) - (3.6) выбирается также как и для выражения (3.1). Далее заменим угловые скорости  $\omega_1^H, \omega_2^H$  векторами  $H1, H2$  соответственно. Тогда, для нашего случая получаем:

$$i_{1-2}^{H_{гр}} = - \frac{H1}{H2} \quad (3.7)$$

В выражении (3.7) выбран знак «-», так как вектора направлены в противоположные стороны (см. рис. 3.6в).

В обращённом зубчатом механизме  $\omega_3^H = -\omega_H$ . Значит, на плане угловых скоростей (рис. 3.6в)  $HO$  можно рассматривать как вектор угловой скорости  $\omega_3^H$ . Тогда

$$i_{2-3}^{H_{гр}} = \frac{H2}{HO} \quad (3.8) \quad i_{1-3}^{H_{гр}} = - \frac{H1}{HO} \quad (3.9)$$

Знаки в правых частях выражений (3.8) - (3.9) также выбраны исходя из взаимного расположения соответствующих векторов (рис. 3.6в).

Определение передаточных отношений планетарного зубчатого механизма 2-го типа (рис. 2.1б) будет рассмотрено в примере 7. Далее рассмотрим определение передаточных отношений графоаналитическим методом для планетарных зубчатых механизмов 3-го (рис. 2.1в) и 4-го (рис. 2.1г) типов.

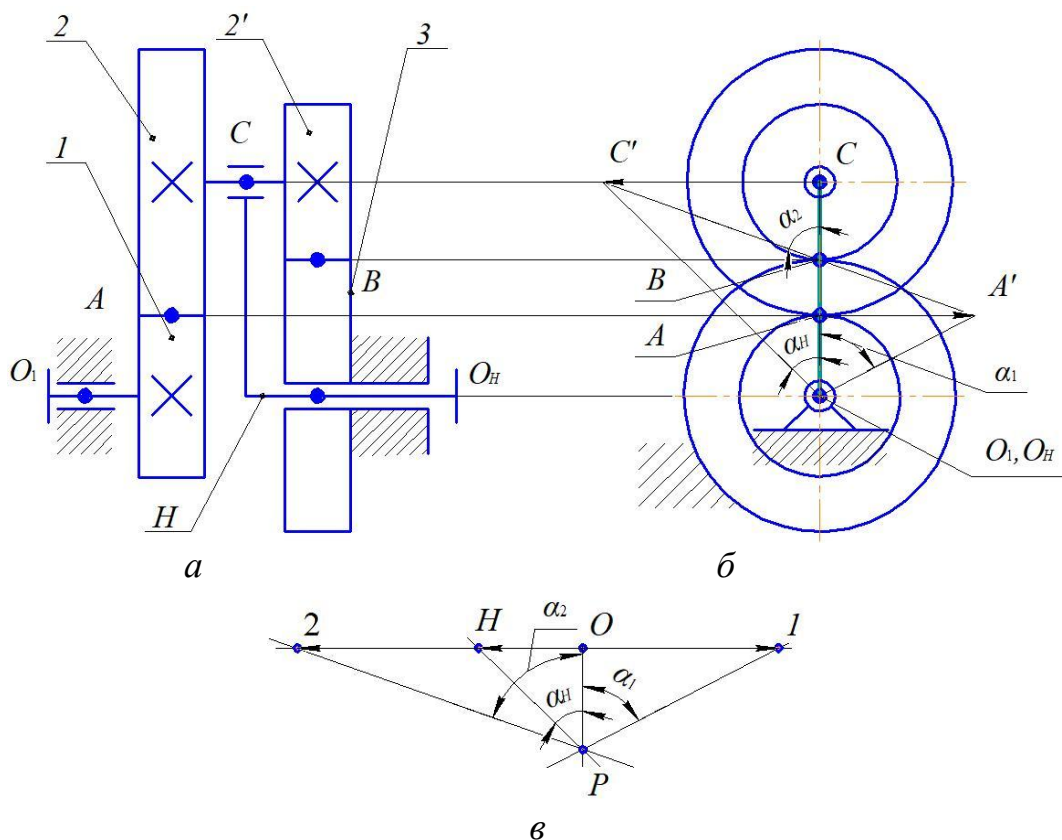


Рис. 3.7. Кинематический анализ планетарного механизма 3-го типа графоаналитическим методом: *a* – кинематическая схема (фронтальная проекция); *б* – кинематическая схема (профильная проекция) и план окружных скоростей; *в* – план угловых скоростей.



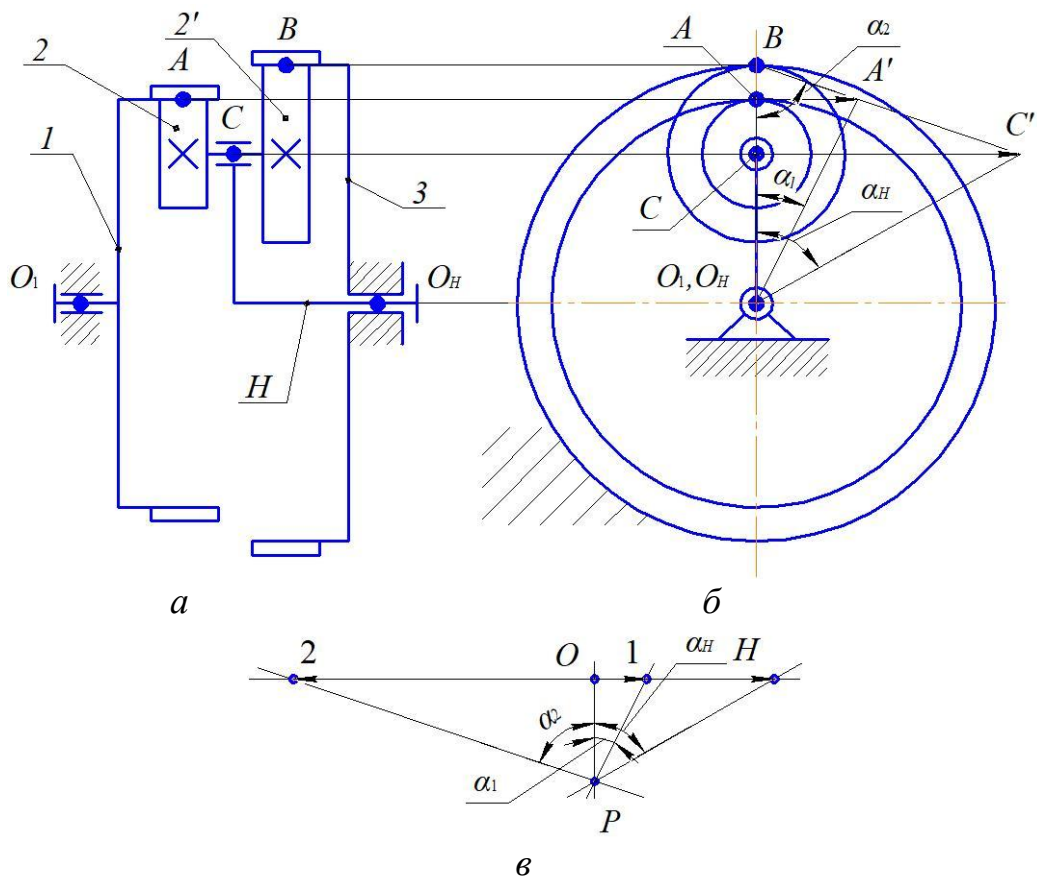


Рис. 3.8. Кинематический анализ планетарного механизма 4-го типа графоаналитическим методом: *а* – кинематическая схема (фронтальная проекция); *б* – кинематическая схема (профильная проекция) и план окружных скоростей; *в* – план угловых скоростей.

На рис. 3.7 – 3.8 изображены результаты графических построений, необходимые для выполнения кинематического анализа графоаналитическим методом планетарных зубчатых механизмов 3-го и 4-го типов соответственно. На основании планов угловых скоростей (рис. 3.7в, 3.8в), полученных для планетарных зубчатых механизмов 3-го и 4-го типов соответственно, получим формулы для определения передаточных отношений  $i_{1-H}^{гр}$ ,  $i_{1-2}^{Hгр}$ ,  $i_{2'-3}^{Hгр}$ ,  $i_{1-3}^{Hгр}$ . Для наглядности, полученные формулы сведём в табл. 3.1.

Таблица 3.1.

**Формулы для определения передаточных отношений  $i_{1-H}^{гр}$ ,  $i_{1-2}^{Hгр}$ ,  $i_{2'-3}^{Hгр}$ ,  $i_{1-3}^{Hгр}$**

Тип планетарного зубчатого механизма	Передаточное отношение			
	$i_{1-H}^{гр}$	$i_{1-2}^{Hгр}$	$i_{2'-3}^{Hгр}$	$i_{1-3}^{Hгр}$
3-й (рис. 3.7)	$-O1/OH$	(3.7)	$-H2/HO$	$H1/HO$
4-й (рис. 3.8)	(3.2)	$H1/H2$	$H2/HO$	

**Примечание:** (3.2), (3.7) – номера формул для определения передаточных отношений  $i_{1-H}^{гр}$ ,  $i_{1-2}^{Hгр}$  для механизмов 4-го и 3-го типов соответственно



Графоаналитическое значение внутреннего передаточного отношения планетарного зубчатого механизма любого типа также может быть определено с помощью формулы:

$$i_{1-3}^{Hrp} = 1 - i_{1-H}^{rp}$$

### ПРИМЕР 6

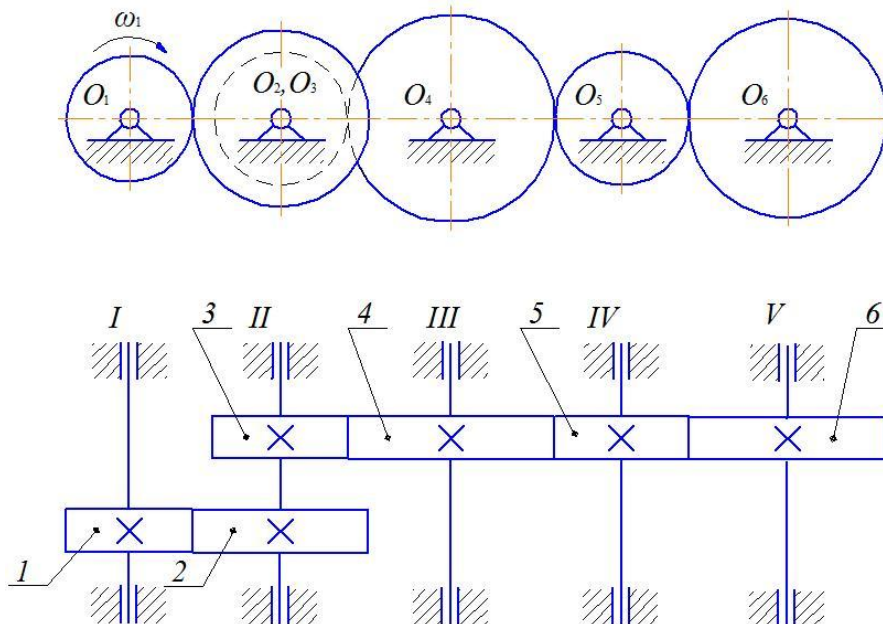


Рис. 3.9. Структурная схема заданного зубчатого механизма

Для сложного зубчатого механизма (рис. 3.9) определить аналитическим методом общее передаточное отношение и угловые скорости зубчатых колёс. Определить общее передаточное отношение механизма графоаналитическим методом и сравнить полученный результат с результатом аналитического решения. Исходные данные: угловая скорость ведущего колеса  $\omega_1 = 54 \text{ с}^{-1}$ ; числа зубьев колёс  $z_1 = 18, z_2 = 27, z_3 = 20, z_4 = 38, z_5 = 19, z_6 = 24$ .

### Решение

#### 1. Определение общего передаточного отношения аналитически

Заданный механизм состоит из 6-ти зубчатых колёс, которые образуют четыре ступени. Колёса 1 и 2 образуют элементарный зубчатый механизм. Колёса 3 – 6 образуют сложный рядный механизм, в котором колёса 4 и 5 являются паразитными. Значит, общее передаточное отношение заданного механизма можно определить с помощью выражения:

$$i_{1-6} = i_{1-2} \cdot i_{3-6}$$

Передаточное отношение элементарного механизма:

$$i_{1-2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{27}{18} = -1,5$$

Передаточное отношение рядного механизма:

$$i_{3-6} = u_{3-4} \cdot u_{4-5} \cdot u_{5-6} \cdot (-1)^k$$



Число внешних зацеплений  $k = 3$ , значит

$$i_{3-6} = \frac{z_6}{z_3} \cdot (-1)^3 = - \frac{24}{20} = -1,2$$

Тогда

$$i_{1-6} = (-1,5) \cdot (-1,2) = 1,8$$

**Общее передаточное отношение заданного механизма получилось со знаком «+» значит, колёса 1 и 6 вращаются в одном направлении.**

## **2. Определение угловых скоростей зубчатых колёс**

Так как, колёса 2,3 располагаются на одном валу, то их угловые скорости равны друг другу:

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_1 / u_{1-2}$$

Угловые скорости остальных колёс определяются с помощью выражений:

$$\omega_4 = \omega_3 / u_{3-4}; \quad \omega_5 = \omega_4 / u_{4-5}; \quad \omega_6 = \omega_5 / u_{5-6}$$

Передаточные числа ступеней механизма:

$$u_{1-2} = |u_{1-2}| = 1,5; \quad u_{3-4} = \frac{z_4}{z_3} = \frac{38}{20} = 1,9;$$
$$u_{4-5} = \frac{z_5}{z_4} = \frac{19}{38} = 0,5; \quad u_{5-6} = \frac{z_6}{z_5} = \frac{24}{19} = 1,26$$

Тогда, искомые угловые скорости:

$$\omega_2 = \omega_3 = 54 / 1,5 = 36 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_4 = 36 / 1,9 \approx 18,95 \text{ с}^{-1};$$
$$\omega_5 = 18,95 / 0,5 = 37,9 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_6 = 37,9 / 1,26 \approx 30,1 \text{ с}^{-1}$$

**Также угловую скорость колеса 6 можно определить с помощью выражения:**

$$\omega_6 = \omega_1 / u_{1-6}$$

Общее передаточное число механизма:

$$u_{1-6} = |i_{1-6}| = 1,8$$

Тогда, искомая угловая скорость:

$$\omega_6 = 54 / 1,8 = 30 \text{ с}^{-1}$$

**Значения вычисленной двумя способами угловой скорости  $\omega_6$  отличаются не более чем на 3 %. Такое расхождение допускается по причине округлений, выполняемых в процессе проведения вычислений.**

## **3. Определение общего передаточного отношения**

### **графоаналитическим методом**

#### **3.1. Синтез кинематической схемы**

Так как по условию задачи учитывать натуральные радиальные размеры зубчатых колёс не требуется, то радиальный размер каждого зубчатого колёса на кинематической схеме принимается пропорционально его числу зубьев. Следовательно, можно принять:  $R_1 = z_1 = 18$  мм;  $R_2 = z_2 = 27$ ;  $R_3 = z_3 = 20$ ;  $R_4 = z_4 = 38$ ;  $R_5 = z_5 = 19$  мм;  $R_6 = z_6 = 24$  мм.

Центры вращения соответствующих зубчатых колёс обозначаем:  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ . Точки зубчатого зацепления колёс 1-2, 3-4, 4-5, 5-6 обозначаем  $A, B, C, D$  соответственно.

Кинематическую схему строим в одной проекции. Порядок построения следующий:



1) Строим горизонтальную прямую – ось отсчёта окружных скоростей, на которой, выполняя засечки с помощью соответствующих дуг, получаем точки  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, A, B, C, D$  (рис. 3.10а). При этом точки  $O_2, O_3$  будут совпадать.

2) Последовательно строим окружности радиусов  $R_1 = 18$  мм;  $R_2 = 27$  мм;  $R_3 = 20$  мм;  $R_4 = 38$  мм;  $R_5 = 19$  мм;  $R_6 = 24$  мм с центрами в точках  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$  соответственно (рис. 3.10б).

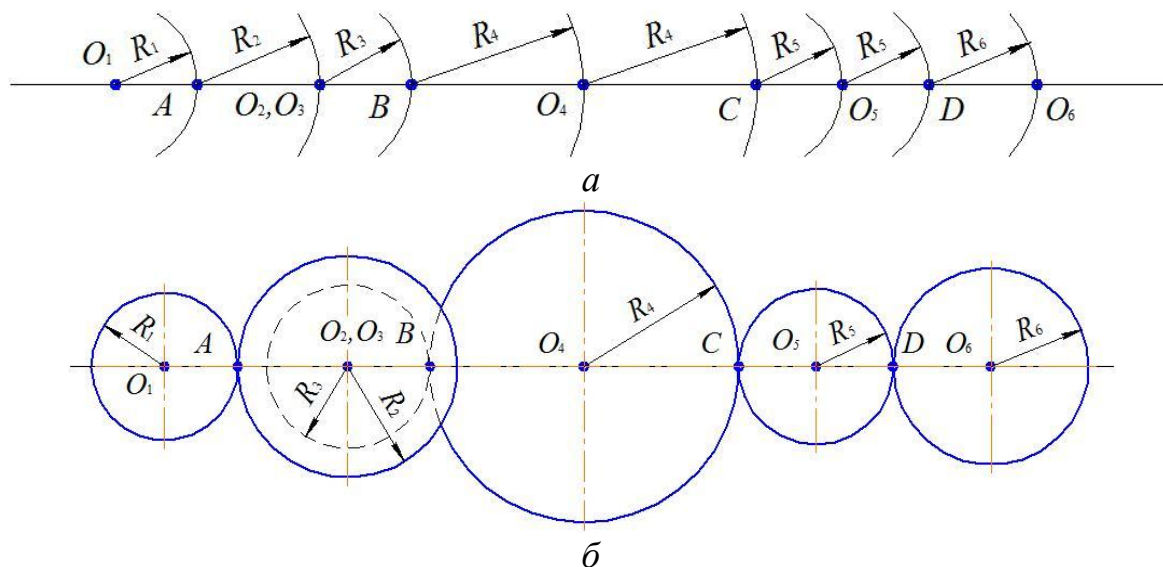


Рис. 3.10. К построению кинематической схемы

3) Прорисовываем элементы стойки. Арабскими цифрами, начиная с 1, нумеруем зубчатые колёса.

В результате выполненных построений получаем кинематическую схему (рис. 3.11а).

### 3.2. Построение плана окружных скоростей

План окружных скоростей (рис. 3.11б) строим в следующем порядке:

1) Строим горизонтальную прямую - ось отсчёта окружных скоростей;

2) На ось отсчёта окружных скоростей проецируем точки  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$  – центры вращения соответствующих зубчатых колёс (точки  $O_2, O_3$  будут совпадать), и точки  $A, B, C, D$  - полюса зацепления соответствующих зубчатых колёс.

3) На вертикальной прямой (линии проекции), проходящей через точку  $A$  строим отрезок  $AA'$ , который является вектором скорости  $v_A$ . Вектор угловой скорости  $\omega_1$  задаёт колесу 1 вращение по часовой стрелке. Следовательно, отрезок  $AA'$ , являющийся вектором скорости  $v_A$ , направлен вертикально вниз. Так как определения скоростей точек не требуется, то принимаем произвольно  $AA' = 25$  мм.

4) Соединив соответствующие точки, получим отрезок  $O_1A'$  и  $\Delta O_1AA'$  – треугольник скоростей колеса 1.

5) Через точки  $A', O_2 (O_3)$  проводим прямую, которая на данной проекции кинематической схемы для колёс 2 и 3 является прямой распределения скоростей точек, лежащих на горизонтальных осях симметрии. Пересечение



этой прямой и вертикальной прямой, проходящей через точку  $B$ , даёт точку  $B'$ . В результате выполненных построений получаем: отрезок  $O_2A'$  и  $\Delta O_2AA'$  – треугольник скоростей колеса 2; отрезок  $O_3B'$  и  $\Delta O_3BB'$  – треугольник скоростей колеса 3; отрезок  $BB'$  – вектор скорости  $v_B$ .

6) Через точки  $B'$ ,  $O_4$  проводим прямую, которая для колеса 4 является прямой распределения скоростей точек, лежащих на горизонтальной оси симметрии. Пересечение этой прямой и вертикальной прямой, проходящей через точку  $C$ , даёт точку  $C'$ . В результате выполненных построений получаем: отрезки  $B'O_4$  и  $O_4C'$ , а также  $\Delta BB'O_4$  и  $\Delta O_4CC'$  – треугольники скоростей колеса 4; отрезок  $CC'$  – вектор скорости  $v_C$ .

7) Действуя аналогично, построим  $\Delta CC'O_5$  и  $\Delta O_5DD'$  – треугольники скоростей колеса 5 и получим отрезок  $DD'$  – вектор скорости  $v_D$ .

8) Соединив соответствующие точки, получим отрезок  $O_6D'$  и  $\Delta O_6DD'$  – треугольник скоростей колеса 6.

### 3.3. Построение плана угловых скоростей

План угловых скоростей (рис. 3.11в) строим в следующем порядке:

1) Проводим вертикальную прямую (ось угловых скоростей) и обозначаем на ней точку  $O$ .

2) Строим горизонтальный луч с началом в точке  $O$  направленный вправо и откладываем на нём отрезок  $OP$  произвольной длины. Допустим  $OP = 30$  мм.

3) Через точку  $P$  проводим прямую параллельную отрезку  $O_1A'$ . Пересечение этой прямой с осью угловых скоростей даёт точку 1 и отрезок  $O1$ .

4) Через точку  $P$  проводим прямую параллельную отрезку  $O_6D'$ . Пересечение этой прямой с осью угловых скоростей даёт точку 6 и отрезок  $O6$ .

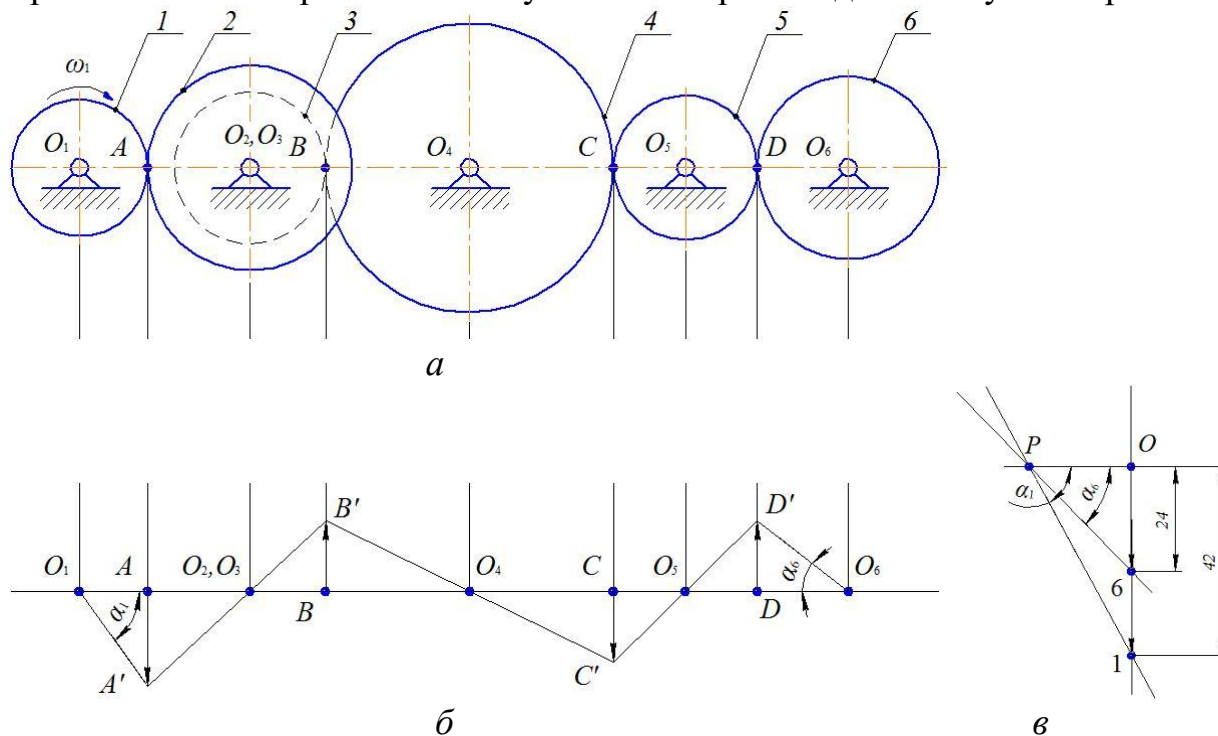


Рис. 3.11. Кинематический анализ заданного зубчатого механизма:

$a$  – кинематическая схема;  $b$  – план окружных скоростей;

$v$  – план угловых скоростей.



### 3.4. Вычисление общего передаточного отношения

Общее передаточное отношение механизма определяется с помощью формулы

$$i_{1-6}^{rp} = \frac{O1}{O6}$$

Согласно плану угловых скоростей (рис.3.11в)  $O1 = 42$  мм;  $O6 = 24$  мм. Тогда общее передаточное отношение механизма

$$i_{1-6}^{rp} = \frac{42}{24} = 1,75$$

**Передаточное отношение  $i_{1-6}^{rp}$  получилось со знаком «+», так как вектора  $O1$ ,  $O6$ , полученные в результате построения плана угловых скоростей, сонаправлены.**

### 3.5. Вычисление ошибки определения общего передаточного отношения механизма

Ошибка определения общего передаточного отношения механизма вычислим с помощью выражения:

$$\Delta i = \frac{|i_{1-6} - i_{1-6}^{rp}|}{i_{1-6}} \cdot 100\%$$

Общее передаточное значение механизма, определённое аналитически  $i_{1-6} = 1,8$ ;  $i_{1-6}^{rp} = 1,75$ .

Тогда

$$\Delta i = \frac{|1,8 - 1,75|}{1,8} \cdot 100\% = 2,8\% \leq 5\%$$

**Полученный результат говорит о правильности выполненных расчётов и построений.**

## ПРИМЕР 7

Для планетарного механизма 2-го типа (рис. 2.1б) определить радиусы делительных окружностей зубчатых колёс, а также прямое передаточное отношение  $i_{1-H}$  и передаточные отношения  $i_{1-2}^H$ ,  $i_{2-3}^H$ ,  $i_{1-3}^H$  его обращённого механизма аналитическим и графоаналитическим методами. Вычислить ошибку определения прямого передаточного отношения. Исходные данные: числа зубьев колёс  $z_1 = 18$ ;  $z_2 = 24$ ;  $z_2' = 22$ ;  $z_3 = 64$ ; модуль зубьев  $m = 2$  мм.

### Решение

#### 1. Определение радиусов делительных окружностей зубчатых колёс

$$r_1 = 0,5 \cdot m \cdot z_1 = 0,5 \cdot 2 \cdot 18 = 18 \text{ мм} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_2 = 0,5 \cdot m \cdot z_2 = 0,5 \cdot 2 \cdot 24 = 24 \text{ мм} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_2' = 0,5 \cdot m \cdot z_2' = 0,5 \cdot 2 \cdot 22 = 22 \text{ мм} = 22 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$r_3 = 0,5 \cdot m \cdot z_3 = 0,5 \cdot 2 \cdot 64 = 64 \text{ мм} = 64 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

#### 2. Определение прямого передаточного отношения $i_{1-H}$ планетарного зубчатого механизма и передаточных отношений $i_{1-2}^H$ , $i_{2-3}^H$ , $i_{1-3}^H$ его обращённого механизма аналитическим методом

Прямое передаточное отношение механизма определяем с помощью формулы Виллиса:



$$i_{1-H} = 1 + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'} = 1 + \frac{24 \cdot 64}{18 \cdot 22} = 4,88$$

Передаточные отношения ступеней обращённого механизма:

$$i_{1-2}^H = - \frac{z_2}{z_1} = - \frac{24}{18} = -1,33; \quad i_{2'-3}^H = \frac{z_3}{z_2'} = \frac{64}{22} = 2,91$$

Внутреннее передаточное отношение:

$$i_{1-3}^H = 1 - i_{1-H} = 1 - 4,88 = -3,88$$

### 3. Определение прямого передаточного отношения $i_{1-H}^H$ планетарного зубчатого механизма и передаточных отношений $i_{1-2}^H$ , $i_{2'-3}^H$ , $i_{1-3}^H$ его обращённого механизма графоаналитическим методом

#### 3.1. Синтез кинематической схемы

Принимаем масштабный коэффициент радиальных размеров  $\mu_R = 0,0005$  м/мм.

Тогда радиальные размеры зубчатых колёс на кинематической схеме

$$R_1 = r_1 / \mu_R = 18 \cdot 10^{-3} / 0,0005 = 36 \text{ мм}$$

$$R_2 = r_2 / \mu_R = 24 \cdot 10^{-3} / 0,0005 = 48 \text{ мм}$$

$$R_2' = r_2' / \mu_R = 22 \cdot 10^{-3} / 0,0005 = 44 \text{ мм}$$

$$R_3 = r_3 / \mu_R = 64 \cdot 10^{-3} / 0,0005 = 128 \text{ мм}$$

Кинематическую схему механизма строим в двух проекциях (рис. 3.12а,б). Центры вращения центрального зубчатого колеса 1, сателлитных колёс 2, 2' и водила H обозначаем  $O_1$ , C,  $O_H$  соответственно. Точки зубчатого зацепления колёс 1-2, 2'-3 обозначаем A, B соответственно. Сначала строим фронтальную проекцию кинематической схемы (рис. 3.12а) и изображаем на ней точки  $O_1$ , C,  $O_H$ , A, B. Боковую (профильную) проекцию кинематической схемы (рис. 3.12б) строим в следующем порядке:

1) Строим вертикальную прямую, на которую проецируем точки  $O_1$ , C,  $O_H$ , A, B. При этом точки  $O_1$ ,  $O_H$ , будут совпадать.

2) Последовательно строим окружности радиусами  $R_1 = 36$  мм;  $R_3 = 128$  мм с центрами в точках  $O_1$ ,  $O_H$  соответственно и окружностями радиусами  $R_2 = 48$  мм;  $R_2' = 44$  мм с центром в точке C.

В завершении построения прорисовываем шарнирно-неподвижную опору  $O_1$ , отрезок  $O_H C$ , который является контуром водила H, а также штриховкой обозначаем колесо 3 как неподвижное звено.

#### 3.2. Построение плана окружных скоростей

План окружных скоростей (рис. 3.12б) строим в следующем порядке:

1) На горизонтальной прямой (линии проекции), проходящей через точку A строим отрезок AA', который является вектором скорости  $v_A$ . Так как определения скоростей точек не требуется, то принимаем произвольно AA' = 100 мм.

2) Соединив соответствующие точки, получим отрезок  $O_1 A'$  и  $\Delta O_1 A A'$  – треугольник скоростей колеса 1.

3) Соединив соответствующие точки, получим отрезок BA' и  $\Delta A B A'$  – треугольник скоростей колеса 2.



4) Пересечение горизонтальной прямой (линии проекции), точку  $C$  строим отрезок  $CC'$ , который является вектором скорости  $v_C$ .

5) Соединив соответствующие точки, получим отрезок  $O_1C'$  и  $\Delta CO_1C'$  – треугольник скоростей водила  $H$ .

### 3.3. Построение плана угловых скоростей

План угловых скоростей (рис. 3.12в) строим в следующем порядке:

1) Проводим горизонтальную прямую (ось угловых скоростей) и обозначаем на ней точку  $O$ .

2) Вертикально вниз строим отрезок  $OP$  произвольной длины.

3) Через точку  $P$  проводим прямую параллельную отрезку  $O_1A'$ . Пересечение этой прямой с осью угловых скоростей даёт точку  $1$  и отрезок  $O1$ .

4) Через точку  $P$  проводим прямую параллельную отрезку  $O_H C'$ . Пересечение этой прямой с осью угловых скоростей даёт точку  $H$  и отрезок  $OH$ .

5) Через точку  $P$  проводим прямую параллельную отрезку  $A'B$ . Пересечение этой прямой с осью угловых скоростей даёт точку  $2$  и отрезок  $O2$ .

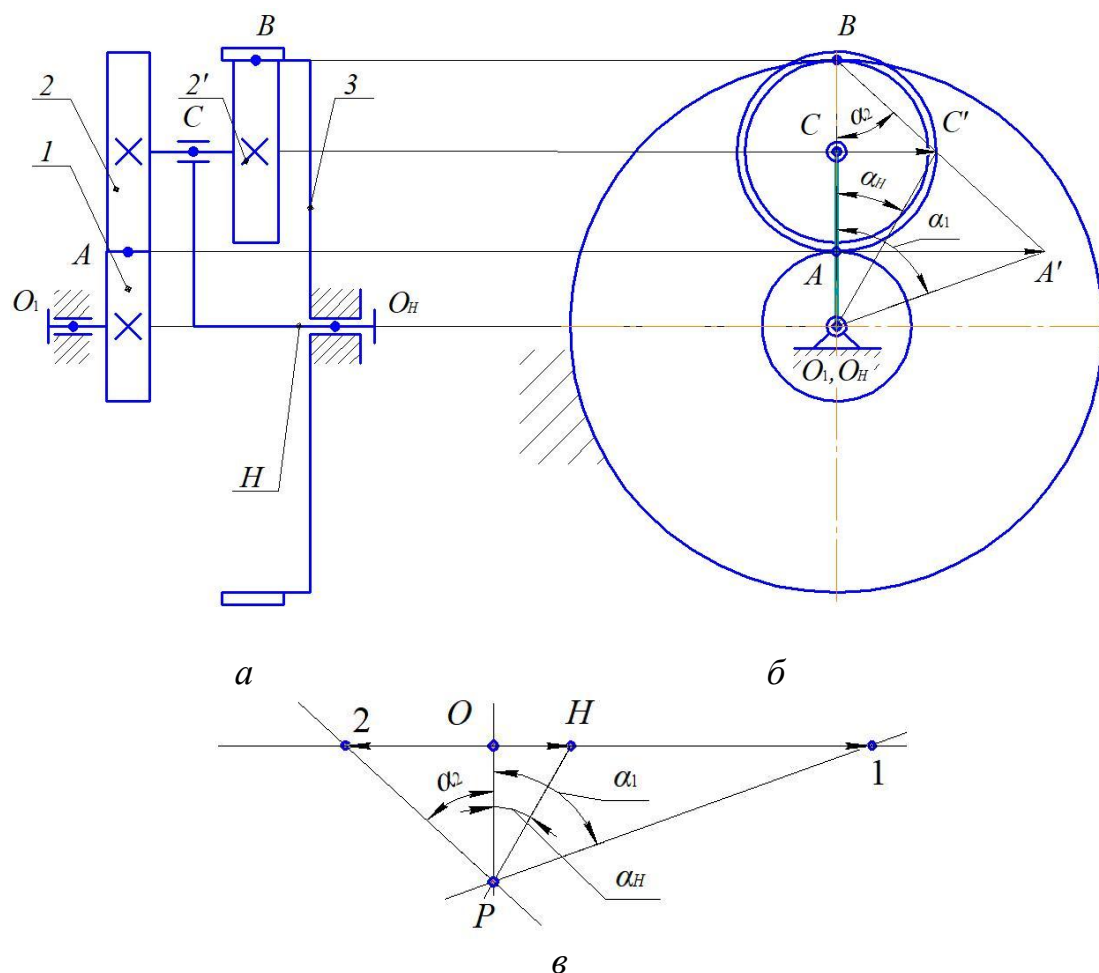


Рис. 3.12. Кинематический анализ планетарного механизма:  
 а - кинематическая схема (фронтальная проекция); б – кинематическая схема  
 (профильная проекция) и план окружных скоростей;  
 в – план угловых скоростей.



### 3.4. Вычисление передаточных отношений $i_{1-H}^{гр}$ , $i_{1-2}^{Hгр}$ , $i_{2'-3}^{Hгр}$ , $i_{1-3}^{Hгр}$

Искомые передаточные отношения определяются с помощью формул:

$$i_{1-H}^{гр} = \frac{O1}{OH}; \quad i_{1-2}^{Hгр} = -\frac{H1}{H2}; \quad i_{2'-3}^{Hгр} = \frac{H2}{HO}; \quad i_{1-3}^{Hгр} = -\frac{H1}{HO}$$

Согласно плану угловых скоростей (рис.3.12в)  $O1=111$  мм;  $H1=88$  мм;  $H2=66$  мм;  $HO=OH=23$  мм. Тогда общее передаточное отношение механизма

$$i_{1-H}^{гр} = \frac{111}{23} = 4,83; \quad i_{1-2}^{Hгр} = -\frac{88}{66} = -1,33;$$
$$i_{2'-3}^{Hгр} = \frac{66}{23} = 2,87; \quad i_{1-3}^{Hгр} = -\frac{88}{23} = -3,88$$

Значение передаточного отношения также может быть определено с помощью формулы:

$$i_{1-3}^{Hгр} = 1 - i_{1-H}^{гр}$$

$i_{1-H}^{гр} = 4,83$ , тогда

$$i_{1-3}^{Hгр} = 1 - 4,83 = -3,83$$

**Вычисленные двумя способами значения передаточного отношения  $i_{1-3}^{Hгр}$  совпали, что говорит о правильности выполненных расчётов и построений**

#### **4. Вычисление ошибки определения прямого передаточного отношения планетарного механизма**

Ошибку определения прямого передаточного отношения планетарного механизма вычисляем с помощью выражения:

$$\Delta i = \frac{|i_{1-H} - i_{1-H}^{гр}|}{i_{1-H}} \cdot 100\%$$

Значение прямого передаточного отношения планетарного механизма, определённое аналитически  $i_{1-H} = 4,88$  (см. п. 2 данного примера). Значение прямого передаточного отношения планетарного механизма, определённое графоаналитически  $i_{1-H}^{гр} = 4,83$  (см. п. 3.4 данного примера).

Тогда

$$\Delta i = \frac{|4,88 - 4,83|}{4,88} \cdot 100\% = 1\% \leq 5\%$$

**Полученный результат говорит о правильности выполненных расчётов и построений.**

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Дорогов, О.В. Кинематический анализ и метрический синтез зубчатых механизмов: метод. указания / О.В. Дорогов. Тверь: ТвГТУ, 2023. 36 с.
2. Дорогов, О.В. Метрический синтез цилиндрической прямозубой передачи: метод. указания / О.В. Дорогов. Тверь: ТвГТУ, 2023. 36 с.
3. Пузырёв, Н.М. Теория механизмов и машин: учеб. пособие/ Тверской гос. техн. ун-т – Тверь: ТвГТУ, 2006. 120 с.
4. Теория механизмов и машин: учеб. пособие / М. А. Мерко, П. Н. Сильченко, А. В. Колотов [и др.]. – Красноярск : ИПК СФУ, 2008. 199 с.



## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Структура и кинематика зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения зубчатых колёс.....	4
1.1. Структурный анализ зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения зубчатых колёс .....	4
1.2. Определение передаточных отношений простых (элементарных) зубчатых механизмов.....	4
1.3. Определение передаточных отношений сложных зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения зубчатых колёс.....	6
2. Структура и кинематика эпициклических зубчатых механизмов.....	10
2.1. Общие сведения об эпициклических зубчатых механизмах.....	10
2.2. Структурный анализ типовых планетарных и дифференциальных зубчатых механизмов.....	11
2.3. Аналитическое определение передаточных отношений планетарных зубчатых механизмов.....	13
3. Графоаналитический метод кинематического анализа зубчатых механизмов.....	26
3.1. Основные положения.....	26
3.2. Графоаналитическое определение передаточных отношений зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения зубчатых колёс.....	29
3.3. Графоаналитическое определение передаточных отношений планетарных зубчатых механизмов.....	32
Библиографический список.....	43

**Олег Викторович Дорогов**

**Структура и кинематика цилиндрических зубчатых механизмов**  
Методические указания для студентов, выполняющих курсовые работы  
и проекты по дисциплинам «Теория механизмов и машин»,  
«Прикладная механика», «Механика»

Технический редактор Ю.Ф. Воробьева

Физ. печ. л. 2,75

Усл. печ. л. 2,56

Уч.-изд. л. 2,39

Редакционно-издательский центр  
Тверского государственного технического университета  
170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

